# RELAZIONE ESISTENTE TRA ENERGIA, QUANTITA' DI MOTO E MASSA A RIPOSO

Ci proponiamo di ricavare una relazione di fondamentale importanza molto usata in fisica nucleare relativistica.

Scriviamoci il sistema tra le equazioni (17) e (24 bis):

$$(26)\cdots\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{array}{l} p = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\ \\ E_0 = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 \end{array}\right\}$$

Per risolvere il sistema iniziamo con il ricavarci il valore di $\mathbf{v}^2$ dalla prima delle due equazioni e sostituiamolo nella seconda. Si trova:

$$p^2 = \frac{m_0 v^2}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} \Rightarrow p^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0 v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{p^2 c^2}{p^2 + m_0^2 c^2}$$

Eseguendo la sostituzione annunciata si ha:

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{\dfrac{p^2 c^2}{p^2+m_0^2 c^2}}{c^2}}} - m_0 c^2 \Rightarrow E_c + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{p^2+m_0^2 c^2}}}$$

Elevando ambo i membri al quadrato e semplificando, si trova:

$$\left(E_c + m_0 c^2\right)^2 = \frac{m_0^2 c^4}{\dfrac{p^2 + m_0 c^2 - p^2}{p^2 + m_0^2 c^2}} \Rightarrow$$

$$(27)\cdots\cdots\cdots\cdots\left(E_c + m_0 c^2\right)^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

Ricordando ora che la quantità $\mathbf{E_c + m_0 c^2}$ rappresenta l'energia totale **E**, si ottiene:

(28)$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; E^2 = p^2c^2 + m_0c^4.$

Verifichiamo subito se questa espressione ci fornisce quella classica nell'approssimazione **v << c**. Partendo dalla (27) e sviluppando il quadrato si trova:

$$E_c^2 + m_0^2c^4 + 2E_cm_0c^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4 \Rightarrow \frac{E_c^2}{c^2} + 2E_cm_0 = p^2$$

Sostituendo ad $\mathbf{E_c^2}$ il suo valore ($\mathbf{1/4.m_0^2v^4}$) si ha:

$$\frac{1}{4}m_0^2\frac{v^4}{c^2} + 2E_cm_0 = p^2$$

e per v << c il primo termine del primo membro diventa trascurabile, di modo che si ha:

$$p^2 \cong 2E_cm_0\,.$$

Qual è la corrispondente espressione classica?

$$E_c = \frac{1}{2}m_0v^2 \Rightarrow 2E_c = m_0v^2 \Rightarrow 2E_cm_0 = m_0^2v^2 \Rightarrow p^2 = 2E_cm_0$$

quest'espressione classica, come si può vedere, è identica a quella relativistica nell'approssimazione **v<<c** .

E' interessante notare che la (28) da noi ricavata risulta indipendente dalla velocità v di un dato sistema di riferimento rispetto ad un altro riferimento considerato in quiete. In conseguenza di ciò la (28) è una invariante per una trasformazione di Lorentz.

## PARTICELLE CON MASSA A RIPOSO NULLA

Se nella (28) poniamo $m_0 = 0$, si ricava:

$$E^2 = p^2c^2$$

cioè (prendendo in considerazione il modulo della quantità di moto **p**):

(29) $$E = pc$$

Ricordando ora la (17):

(17)$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\; p = \dfrac{m_o v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

Con semplici trasformazioni si ottiene:

$$pc^2 = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot v \Rightarrow pc^2 = Ev \Rightarrow pc = E\frac{v}{c} \Rightarrow pc = pc\frac{v}{c} \Rightarrow v = c$$

avendo tenuto conto della (29). In definitiva quando si ha a che fare con particelle di massa nulla (massa a riposo $\mathbf{m_0 = 0}$), queste si muovono sempre alla velocità della luce.

Un esempio di tali particelle sono i fotoni che costituiscono non solo la radiazione visibile ma anche quella X, …, gamma. Un altro possibile esempio, del quale però non si ha ancora una definitiva evidenza sperimentale, sono i neutrini.

Riferendoci ai soli fotoni, risulta evidente che a queste particelle compete una energia $\mathbf{E = pc}$ [si veda la (29)] e conseguentemente una quantità di moto $\mathbf{p = E/c}$ . A queste stesse relazioni si perviene anche per via classica come risultato dell'elettromagnetismo di Maxwell e del teorema di Poynting (vedi, ad esempio, E. Amaldi - Fisica generale II - Veschi, 1965; pagg, 457-459). In quest'ultimo caso, evidentemente, non si parla di fotoni ma semplicemente di onde elettromagnetiche. Ciò vuol dire che un ulteriore risultato della fisica classica lo si ritrova, per una via completamente diversa, in meccanica relativistica. Se si tiene poi conto che l'energia associata ad un dato fotone è data da:

$$\mathbf{E = h\nu}$$

l'espressione (29) può scriversi:

$$\mathbf{p = h\nu/c} \tag{30}$$

e, ricordando che $\mathbf{c/\nu = \lambda}$, lunghezza d'onda del fotone in esame, risulta:

$$\mathbf{p = h/\lambda} \tag{30 bis}$$

che è una delle relazioni fondamentali introdotte da De Broglie nella sua **meccanica ondulatoria.**

Come si vede le (30) e (30 bis) rappresentano un'estensione del concetto di quantità di moto a parlicelle di massa a riposo nulla. E per intendere che significato sperimentale si può assegnare ad una quantità di moto associata ad una particella di massa nulla,si può pensare alla pressione che la radiazione esercita sulle superfici; e di questa pressione abbiamo, tra l'altro, una evidenza sperimentale nella coda delle comete che, bombardate dai fotoni emessi dal Sole (ma anche da altre particelle, dotate di massa, provenienti dal Sole medesimo), rivolgono sempre la loro coda nella stessa direzione e verso del *vento energetico* proveniente dal Sole. (924)

E' interessante notare che mentre per una data particella materiale ($\mathbf{m_0 \neq 0}$) è sempre possibile trovare un riferimento rispetto al quale essa risulti in quiete (poiché la velocità di questa particella è sempre inferiore a **c**), per un fotone ($\mathbf{m_0 = 0}$), poiché la sua velocità è quella della luce ($\mathbf{v = c}$) e poiché la luce ha la stessa velocità in tutti i sistemi inerziali, non si può trovare nessun riferimento in cui esso risulti in quiete (anche se osservatori su differenti sistemi inerziali misureranno per esso diverse energie e quantità di moto).

## NOTE

(924) Si noti che la pressione di radiazione fu prevista teoricamente da Maxwell (1873) e da Bartoli (1876) e fu verificata sperimentalmente da Lebedev (1890) e da Nichols ed. Hull (1901). In proposito si può leggere il mio articolo pubblicato nella stessa sezione del sito.