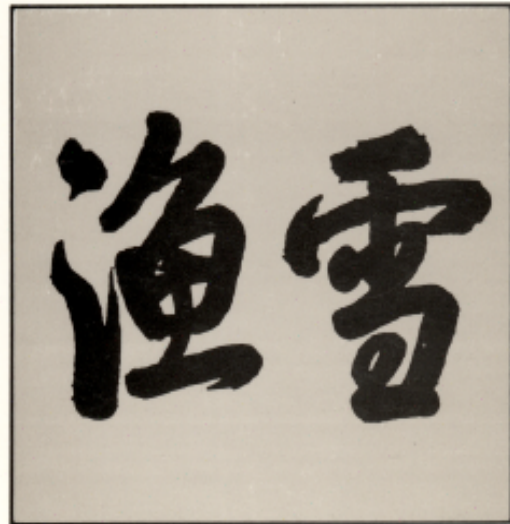


Marco Roncadelli e Antonio Defendi

# I CAMMINI DI FEYNMAN



QUADERNI DI FISICA TEORICA



Università degli Studi di Pavia  
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica



# QUADERNI DI FISICA TEORICA

Collana curata da Sigfrido Boffi

## Comitato Scientifico

Bruno Bertotti  
Sigfrido Boffi  
Italo Guarneri  
Alberto Rimini  
Marco Roncadelli

## Volumi già pubblicati:

1. Le onde di de Broglie, a cura di Sigfrido Boffi
2. Onde di materia e onde di probabilità, a cura di Sigfrido Boffi
3. Il principio di indeterminazione, a cura di Sigfrido Boffi
4. La meccanica delle onde, a cura di Sigfrido Boffi
5. Paradosso EPR e teorema di Bell, a cura di Oreste Nicosini
6. I cammini di Feynman, a cura di Marco Roncadelli e Antonio Defendi
7. L'interpretazione statistica della meccanica quantistica, a cura di Sigfrido Boffi
8. L'origine delle statistiche quantistiche, a cura di Fulvio Piccinini
9. Le radici della quantizzazione, a cura di Sandro Graffi
10. La fase di Berry, a cura di Franco Salmistraro
11. Il postulato dei quanti e il significato della funzione d'onda, a cura di Sigfrido Boffi
12. Indice di rifrazione adronico, a cura di Francesco Cannata
13. La formulazione delle storie della meccanica quantistica, a cura di Irene Giardina
14. La regola d'oro di Fermi, a cura di Paolo Facchi e Saverio Pascazio
15. Le radici del dualismo onda-corpuscolo, a cura di Sigfrido Boffi e Michele D'Anna
16. Teoria delle caratteristiche ed equazioni ondulatorie quantiche, a cura di Paola Orsi

I primi dieci Quaderni sono disponibili su richiesta presso il Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell'Università di Pavia. I successivi sono pubblicati dalla Casa Editrice Bibliopolis



Marco Roncadelli e Antonio Defendi

# **I CAMMINI DI FEYNMAN**

QUADERNI DI FISICA TEORICA



Università degli Studi di Pavia  
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

Prima edizione: gennaio 1992  
Edizione web: ottobre 2001

ISBN 88-85159-06-0

## INDICE

Premessa .....	7
§1. Concetto di propagatore quantistico .....	11
§2. Aspetti dell'integrale di Feynman .....	15
§3. Analogie fra meccanica quantistica e processi stocastici classici .	34
§4. Osservazioni storiche .....	51
– Approccio spazio-temporale alla meccanica quantistica non relativistica .....	57
§5. Nuova formulazione della meccanica quantistica .....	95
§6. Bibliografia .....	122
– Addendum .....	129





## PREMESSA

Un fondamentale cambiamento di prospettiva nell'impostazione dei problemi di meccanica quantistica si è avuto agli inizi degli anni '50 principalmente ad opera di Richard Feynman, al quale si deve una formulazione della teoria quantistica diversa da quella usuale di Heisenberg, Schrödinger e Dirac.

La formulazione di Feynman è basata sul concetto di “*integrale sui cammini*” e permette di esprimere l'*ampiezza* (quantistica) di transizione fra due punti spazio-temporali senza far ricorso a vettori di stato ed operatori in uno spazio di Hilbert. Questo approccio fornisce inoltre una rappresentazione intuitiva del *limite classico* della meccanica quantistica.

L'importanza pratica della strategia di Feynman è dovuta al fatto che essa rappresenta un'*alternativa* alle tecniche di soluzione dei problemi quantistici basate sull'equazione di Schrödinger. Naturalmente, nei casi in cui tale equazione sia risolvibile *esattamente*, il nuovo metodo non aggiunge nulla di nuovo. Tuttavia è ben noto che si tratta di pure eccezioni: per la maggior parte dei problemi fisicamente rilevanti risulta impossibile risolvere l'equazione di Schrödinger. È proprio in queste circostanze che un nuovo approccio alla teoria quantistica diventa molto importante, in quanto esso permette di sviluppare *nuovi* metodi di soluzione approssimate.

Ora, nell'ambito più ristretto della meccanica quantistica *non* relativistica, i vantaggi derivanti dalla formulazione di Feynman si manifestano principalmente in alcuni tipi di problemi, come quelli basati sull'approssimazione semiclassica e sulla trattazione dei fenomeni quantistici nei sistemi macroscopici.

La situazione cambia radicalmente se si considera l'estensione relativistica, cioè la teoria quantistica dei campi. Il motivo di fondo è molto semplice. La quantizzazione canonica è basata sul formalismo hamiltoniano, in cui il tempo gioca un ruolo *diverso* dalle coordinate spaziali: la teoria non può quindi essere “covariante a vista” rispetto a trasformazioni di Lorentz. Questo serio inconveniente è ovviato nell'approccio di Feynman, poiché il tempo e le coordinate spaziali vengono poste sullo *stesso* piano. Un ulteriore importantis-

simo vantaggio rispetto al metodo canonico è di permettere la quantizzazione delle teorie di gauge in modo notevolmente più semplice. Si noti che le “*regole di Feynman*” per tali teorie sono state derivate proprio facendo uso dell’“*integrale sui cammini*”.

Scopo del presente Quaderno è fornire un’*introduzione* alla formulazione di Feynman della teoria quantistica. Ci limiteremo quindi a considerare solo la meccanica quantistica non relativistica (per ciò che concerne la teoria quantistica dei campi verrà data soltanto una traccia bibliografica). Com’è consuetudine dei Quaderni di Fisica Teorica, presentiamo in traduzione l’articolo fondamentale sull’argomento, che è stato pubblicato da Feynman nel 1948.

Desideriamo sottolineare che questo lavoro è oggi più un documento storico che non un’esposizione consigliabile a chi voglia imparare il metodo di quantizzazione di Feynman. Pensiamo però che la sua lettura costituisca una notevole esperienza intellettuale – anche per gli studenti di Fisica – se corredata da un’opportuna introduzione in chiave moderna e da alcuni commenti che illustrino il contesto storico in cui si colloca il lavoro di Feynman.

Il presente Quaderno si articola nel modo seguente. Dopo un breve richiamo del concetto di *propagatore quantistico* (capitolo 1), discutiamo gli aspetti più importanti della strategia di Feynman (capitolo 2). Segue una trattazione schematica della teoria dei processi stocastici classici, che mette in particolare evidenza il parallelismo *strutturale* fra questa e la meccanica quantistica (capitolo 3). In effetti, tale analogia costituisce il punto di partenza del lavoro di Feynman e chiarisce notevolmente la natura dell’“*integrale sui cammini*”. Sottolineiamo che *non* ci stiamo riferendo al fatto che la meccanica quantistica a tempo *immaginario* diventa (formalmente) una teoria probabilistica *classica* (sfortunatamente ci siamo trovati costretti ad ignorare quest’*ulteriore* analogia per ragioni di spazio e di semplicità; tuttavia il lettore interessato a questo argomento può trovare una discussione di facile lettura in: M. Roncadelli, Nuovo Cimento **11D**, 73 (1989)). Prima di presentare la traduzione del lavoro originale, consideriamo brevemente (capitolo 4) quali siano state in realtà le motivazioni che hanno indotto Feynman a riformulare la teoria quantistica (difficilmente il lettore di oggi potrebbe immaginarle!).

La nostra esposizione differisce dalle (molte) altre per una maggiore attenzione al concetto di “*cammini di Feynman*”. Mostreremo (capitolo 5) che il desiderio di interpretare tali cammini come soluzioni di un’opportuna *equazione differenziale stocastica* – secondo un punto di vista suggerito proprio dall’analogia formale fra teoria quantistica e teoria dei processi stocastici classici – permette di giungere in modo del tutto naturale ad una *nuova* formulazione della meccanica quantistica (ottenuta molto recentemente da uno degli autori), che appare quindi come un ulteriore sviluppo delle idee di Feynman.

Conclude il presente Quaderno una bibliografia sull’*integrale* di Feynman e questioni connesse, che può fornire utili suggerimenti al lettore che voglia approfondire alcuni degli argomenti trattati nel testo.

L'articolo originale di Feynman, pubblicato su *Reviews of Modern Physics*, è tradotto con il permesso dell'American Physical Society.

Desideriamo ringraziare Sara Dalprà, Antonia Frangipani ed Elena Giudici per un attenta lettura del testo e Italo Guarneri e Alberto Rimini per utili discussioni. Un particolare ringraziamento va a Sigfrido Boffi per il costante incoraggiamento ricevuto, senza il quale questo Quaderno non sarebbe probabilmente mai stato scritto.



## §1. Concetto di propagatore quantistico

1.1 – Consideriamo per semplicità il moto *unidimensionale* di una particella non relativistica in presenza di un potenziale scalare stazionario  $V(x)$  (situazioni più generali verranno discusse in seguito). È ben noto che la corrispondente equazione di Schrödinger ha la forma

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x) \psi(x, t). \quad (1.1)$$

Ora, un fisico degli anni '30 *non* avrebbe cercato di risolvere *direttamente* tale equazione! Egli avrebbe invece osservato che – essendo  $V(x)$  indipendente dal tempo – è conveniente porre

$$\psi(x, t) \equiv e^{-iEt/\hbar} \varphi(x) \quad (1.2)$$

cosicché l'eq. (1.1) diventa

$$\frac{d^2}{dx^2} \varphi(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \varphi(x) = 0. \quad (1.3)$$

A questo stadio,  $E$  è ovviamente un parametro (reale) indeterminato<sup>1</sup>. Supponiamo ulteriormente che  $V(x)$  soddisfi la condizione<sup>2</sup>

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = +\infty. \quad (1.4)$$

Si può allora dimostrare che l'eq. (1.3) ammette soluzioni  $\varphi(x)$  soddisfacenti alle usuali condizioni di regolarità<sup>3</sup> *solo* per certi valori *discreti* del parametro  $E$  (li indicheremo con  $E_0, E_1, E_2, \dots$  e supporremo che si abbia  $E_0 < E_1 < E_2 < \dots$ ). Quindi, in corrispondenza ad ognuno dei suddetti valori  $E_n$  si avrà una

---

<sup>1</sup> Naturalmente  $E$  ha il significato fisico di energia della particella. Tuttavia questa circostanza è irrilevante per le considerazioni esposte in questo paragrafo.

<sup>2</sup> Se l'eq. (1.4) non valesse, si avrebbe in generale uno spettro continuo di autovalori per l'eq. (1.3), ma il ragionamento che segue rimarrebbe inalterato.

<sup>3</sup> Queste condizioni seguono direttamente dal significato fisico della funzione d'onda (il suo modulo quadrato fornisce la densità di probabilità) e sono discusse in tutti i testi di meccanica quantistica.

soluzione <sup>4</sup> dell'eq. (1.3): esse verranno indicate come  $\varphi_n(x)$ . Sotto ipotesi molto generali l'insieme delle  $\varphi_n(x)$  è *completo* in  $L^2_\infty$ , per cui l'*integrale generale* dell'eq. (1.1) può essere rappresentato come

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(x) \quad (1.5)$$

ove  $c_n$  sono coefficienti (complessi) arbitrari.

Possiamo schematizzare il suddetto procedimento nel modo seguente. L'originaria equazione di Schrödinger alle derivate parziali (1.1) è stata ridotta – mediante l'introduzione di un parametro arbitrario – ad un'equazione differenziale ordinaria. La richiesta di regolarità imposta alla funzione d'onda porta a considerare il *problema agli autovalori* associato a quest'ultima equazione. L'*integrale generale* dell'equazione di Schrödinger di partenza può allora essere ottenuto come opportuna combinazione lineare delle *autofunzioni* in questione.

Vogliamo osservare che questo è proprio il modo in cui Schrödinger è arrivato alla sua equazione – non a caso il titolo dei suoi lavori è “Quantizzazione come problema agli autovalori” <sup>5</sup>.

1.2 – L'approccio di Feynman <sup>6</sup> all'equazione di Schrödinger (1.1) è *radicalmente diverso*. La sua proposta consiste nel considerare *direttamente*

<sup>4</sup> Supponiamo (per semplicità) che nessuno degli autovalori dell'eq. (1.3) sia degenere.

<sup>5</sup> Si veda il Quaderno di Fisica Teorica: S. Boffi, *La Meccanica delle Onde* (1991).

<sup>6</sup> Richard Phillips Feynman (1918–1988) è considerato, per consenso pressoché unanime, il più grande fisico teorico del dopoguerra. A lui si devono risultati fondamentali in vari settori della fisica teorica, il più importante dei quali è la rappresentazione diagrammatica di una generica espansione perturbativa, che semplifica enormemente i calcoli in teoria quantistica dei campi (si tratta dei famosi *diagrammi di Feynman*). Sottolineiamo che egli è giunto a questo risultato proprio applicando l'“*integrale sui cammini*” all'elettrodinamica quantistica. Libertà e anticonformismo, combinate con una grande creatività, hanno spinto Feynman a ripensare in modo autonomo gran parte della fisica teorica. Egli possedeva anche notevoli doti di “attore”, che lo rendevano un eccezionale didatta: sono giustamente famose le sue lezioni di fisica (R. P. Feynman, *La Fisica di Feynman* (Addison-Wesley, Reading, 1968)). Si narrano innumerevoli aneddoti in cui Feynman è protagonista di situazioni curiose o impensabili; alcuni li racconta egli stesso nei suoi libri autobiografici: R. P. Feynman, “*Surely you're joking, Mr. Feynman!*” *Adventures of a Curious Character*, Norton, New York (1985) (trad. it., “*Sto scherzando Mr. Feynman!*” *Vita e Avventure di uno scienziato curioso*, Zanichelli, Bologna (1988)); “*What Do You Care What Other People Think?*” *Further Adventures of A Curious Character*, Norton, New York (1988) (trad. it., “*Che t'importa di ciò che dice la gente?*” *Altre avventure di uno scienziato curioso*, Zanichelli, Bologna (1989)). Ne riportiamo qui soltanto uno, che riguarda direttamente l'argomento trattato nel presente Quaderno. L'idea dell'“*integrale sui cammini*” venne a Feynman da una precedente osservazione di Dirac, in cui si affermava che una certa grandezza quantistica è *analogica* ad un'altra classica. Egli riuscì a dimostrare – cosa di fondamentale importanza – che in realtà tali grandezze sono *proporzionali*. Successivamente, ebbe l'occasione di parlare con Dirac di queste questioni e non resistette alla tentazione di dirgli: “Sai che quelle grandezze sono proporzionali?”. Dirac, stupito, chiese: “Davvero?”. “Sì”, rispose Feynman, al che l'unico commento di Dirac fu: “Oh, interessante!”. Il lettore può trovare molte informazioni

l'eq. (1.1) fissando l'attenzione sul cosiddetto *propagatore quantistico* – che indicheremo con  $\langle x, t|x_0, t_0 \rangle$  – vale a dire su quella particolare soluzione (nelle variabili  $x, t$ ) che è definita dalla condizione iniziale

$$\langle x, t_0|x_0, t_0 \rangle = \delta(x - x_0) \quad (1.6)$$

ove  $\delta(x - x_0)$  è la funzione delta di Dirac. Fisicamente  $\langle x, t|x_0, t_0 \rangle$  fornisce l'*ampiezza di transizione* da  $(x_0, t_0)$  a  $(x, t)$  e la corrispondente *probabilità<sup>7</sup> (quantistica) di transizione* è data da

$$P_q(x, t|x_0, t_0) = |\langle x, t|x_0, t_0 \rangle|^2. \quad (1.7)$$

Osserviamo che la notazione  $\langle x, t|x_0, t_0 \rangle$  è estremamente opportuna, in quanto il propagatore quantistico da  $(x_0, t_0)$  a  $(x, t)$  è proprio il prodotto scalare di due autostati dell'operatore posizione in descrizione di Heisenberg (uno a  $t_0$  e l'altro a  $t$ ). L'importanza del concetto di propagatore risiede nel fatto che un'*arbitraria* soluzione dell'eq. (1.1) individuata dalla condizione iniziale  $\psi(x, t_0) \equiv \psi_0(x)$  può essere rappresentata come

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x, t|x_0, t_0 \rangle \psi_0(x_0). \quad (1.8)$$

È facile verificare quest'ultima affermazione se si tiene conto che  $\langle x, t|x_0, t_0 \rangle$  soddisfa per definizione l'eq. (1.1) nelle variabili  $x, t$ . Inoltre dall'eq. (1.6) segue

$$\begin{aligned} \psi(x, t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x, t_0|x_0, t_0 \rangle \psi_0(x_0) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \delta(x - x_0) \psi_0(x_0) = \psi_0(x). \end{aligned} \quad (1.9)$$

---

sull'opera di Feynman in: R. P. Feynman, *The Development of the Space-Time View of Quantum Electrodynamics*, Science **153**, 699 (1966); S. S. Schweber, *Feynman and the Visualization of Space-Time Processes*, Rev. Mod. Phys. **58**, 449 (1986). Si veda inoltre il fascicolo di Physics Today (febbraio 1989) dedicato a Feynman.

<sup>7</sup> Considereremo sempre distribuzioni di ampiezza o di probabilità relative a variabili *continue* (usualmente la posizione di una particella), per cui non ha senso parlare di ampiezza o di probabilità di ottenere un *singolo* valore (essa è sempre nulla!). In realtà, le ampiezze o probabilità di cui ci occuperemo sono delle *densità*; ad esempio  $P_q(x, t|x_0, t_0)$  nell'eq. (1.7) è una densità nella variabile  $x$ . Questa osservazione ci permette di omettere (per semplicità di linguaggio) l'attributo *densità*. Ci auguriamo che ciò non tragga in inganno il lettore!

Pertanto la conoscenza del propagatore permette di calcolare un' *arbitraria* soluzione dell'equazione di Schrödinger. Questo fatto – non sempre apprezzato appieno – costituisce il *presupposto fondamentale* alla formulazione di Feynman della teoria quantistica. È opportuno osservare che, benché l'uso del propagatore per risolvere l'equazione di Schrödinger non sia certo opera di Feynman <sup>8</sup>, egli è stato indubbiamente il primo a capire il ruolo cruciale che esso gioca in meccanica quantistica.

1.3 – Sussiste una notevole relazione fra il propagatore dell'equazione di Schrödinger (1.1) ed il problema agli autovalori associato all'eq. (1.3). Abbiamo infatti

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x'') \varphi_n^*(x') e^{-iE_n(t''-t')/\hbar}. \quad (1.10)$$

Vogliamo dimostrare l'eq. (1.10). Usando la ben nota legge di trasformazione fra le descrizioni di Heisenberg e di Schrödinger, possiamo scrivere

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \langle x'' | e^{-i\hat{H}(t''-t')/\hbar} | x' \rangle \quad (1.11)$$

ove  $|x\rangle$  è l'autovettore (associato all'autovalore  $x$ ) dell'operatore posizione in descrizione di Schrödinger e  $\hat{H}$  l'operatore hamiltoniano corrispondente all'eq. (1.1). Scriviamo il problema agli autovalori per  $\hat{H}$  nella forma

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (1.12)$$

supponendo che l'insieme degli autostati  $|n\rangle$  sia ortonormale e completo. Naturalmente proiettando l'eq. (1.12) sulla rappresentazione delle coordinate si deve ritrovare l'eq. (1.3), il che implica  $\varphi_n(x) = \langle x|n\rangle$ . Allora segue

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \langle x'' | e^{-i\hat{H}(t''-t')/\hbar} | x' \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle x'' | e^{-i\hat{H}(t''-t')/\hbar} | n \rangle \langle n | x' \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle x'' | n \rangle \langle n | x' \rangle e^{-iE_n(t''-t')/\hbar} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x'') \varphi_n^*(x') e^{-iE_n(t''-t')/\hbar} \end{aligned} \quad (1.13)$$

---

<sup>8</sup> Esso era noto da molto tempo nella teoria delle equazioni differenziali lineari. Si noti che i matematici parlano di *soluzione fondamentale* anziché di *propagatore*.



che è proprio l'eq. (1.10).

Notiamo infine che il propagatore soddisfa la *condizione di unitarietà*

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle^* = \langle x', t' | x'', t'' \rangle. \quad (1.14)$$

Essa è conseguenza diretta dell'hermiticità dell'hamiltoniana, come si vede facilmente usando l'eq. (1.11).

## §2. Aspetti dell'integrale di Feynman

2.1 – La formulazione di Feynman fornisce il propagatore dell'equazione di Schrödinger come *integrale sui cammini (integrale di Feynman)*. Risulta quindi possibile calcolare il propagatore quantistico *senza* che sia necessario risolvere l'equazione di Schrödinger. Sottolineiamo che è proprio quest'ultima circostanza che rende questo approccio così importante da un punto di vista applicativo. Infatti, anche nei casi in cui non si riesca a calcolare esattamente l'integrale di Feynman, è peraltro possibile sviluppare nuovi metodi di soluzione approssimati<sup>9</sup>.

2.2 – Pensiamo di fare cosa utile al lettore mostrando – nel semplice caso dell'equazione di Schrödinger (1.1) – come l'integrale di Feynman emerga in modo naturale partendo dalla usuale formulazione operatoriale della teoria quantistica. Questo modo di procedere è, in un certo senso, *opposto* a quello originario di Feynman (si veda il paragrafo 2.4 e l'articolo tradotto): egli ha infatti *derivato* l'equazione di Schrödinger e l'algebra degli operatori assumendo il suo integrale sui cammini come *postulato* (a cui giunge con considerazioni euristiche). Sfortunatamente è quasi impossibile rendere l'integrale di Feynman un concetto matematicamente rigoroso<sup>10</sup> e la definizione datane da Feynman stesso può apparire (pensiamo a ragione!) troppo “ingenua”<sup>11</sup> – ci sembra che il procedimento esposto qui sotto sia un compromesso accettabile fra rigore formale e semplicità concettuale<sup>12</sup>.

Consideriamo preliminarmente due operatori  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  definiti su un certo spazio di Hilbert. Supponiamo che  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  *non* commutino, cosicché si avrà

<sup>9</sup> Oltre ai testi citati nella bibliografia, si veda in particolare il libro: L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, New York, 1981).

<sup>10</sup> Non vogliamo addentrarci in queste difficili questioni che – di fatto – non condizionano minimamente le applicazioni fisiche. Il lettore interessato a questi aspetti matematici può consultare i seguenti lavori di rassegna: S. A. Albeverio and R. J. Hoegh-Krohn, *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals* (Springer, Berlin, 1976); C. De Witt-Morette, A. Maheshwari and B. Nelson, *Phys. Rep.* **50**, 255 (1979).

<sup>11</sup> Il vantaggio di derivare l'integrale di Feynman dall'approccio operatoriale è di ragionare in modo matematicamente più soddisfacente.

<sup>12</sup> Seguiamo (in modo semplificato) un metodo proposto in: E. Nelson, *J. Math. Phys.* **5**, 332 (1964). Rimandiamo il lettore a questo articolo per maggiori dettagli riguardo al presente paragrafo. La *formula di Trotter* è discussa in: H. Trotter, *Proc. Am. Math. Soc.* **10**, 545 (1959).

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} \neq e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}. \quad (2.1)$$

È pertanto un fatto notevole che – sotto ipotesi piuttosto generali – si abbia invece

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( e^{\hat{A}/N} e^{\hat{B}/N} \right)^N \quad (2.2)$$

che è essenzialmente la *formula di Trotter*. Come vedremo, l'integrale di Feynman altro non è che una conseguenza di tale formula, combinata con un'osservazione dovuta a Dirac!

Fissiamo ora l'attenzione sul propagatore  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  dell'equazione di Schrödinger (1.1). Ponendo

$$\lambda \equiv \frac{i}{\hbar} (t'' - t'), \quad (2.3)$$

$$\hat{H} \equiv \hat{T} + \hat{V} \quad (2.4)$$

e facendo uso dell'eq. (1.11) possiamo scrivere

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \langle x'' | e^{-\lambda(\hat{T}+\hat{V})} | x' \rangle \quad (2.5)$$

che – in virtù della formula di Trotter (2.2) – diventa

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x'' | (e^{-\lambda\hat{T}/N} e^{-\lambda\hat{V}/N})^N | x' \rangle. \quad (2.6)$$

È ben noto che la relazione di completezza per gli autostati dell'operatore posizione (in descrizione di Schrödinger)  $|x\rangle$  si scrive

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle \langle x| = 1. \quad (2.7)$$

Inserendo l'eq. (2.7) fra gli  $N$  fattori  $e^{-\lambda\hat{T}/N} e^{-\lambda\hat{V}/N}$  che sono presenti nell'eq. (2.6) abbiamo

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x'' | e^{-\lambda\hat{T}/N} e^{-\lambda\hat{V}/N} | x_{N-1} \rangle \cdot \\ &dx_{N-1} \langle x_{N-1} | e^{-\lambda\hat{T}/N} e^{-\lambda\hat{V}/N} | x_{N-2} \rangle dx_{N-2} \cdots \\ &dx_1 \langle x_1 | e^{-\lambda\hat{T}/N} e^{-\lambda\hat{V}/N} | x' \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

È conveniente porre  $x' \equiv x_0$  e  $x'' \equiv x_N$ , cosicché l'eq. (2.8) può essere riscritta nella forma più compatta <sup>13</sup>

$$\begin{aligned} & \langle x'', t'' | x', t' \rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right) \prod_{j=0}^{N-1} \langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} e^{-\lambda \hat{V}/N} | x_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Questa equazione – che segue direttamente dalla formula di Trotter – esprime il propagatore  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  in funzione del propagatore relativo ad un intervallo di tempo *infinitesimo* (vale a dire  $(t'' - t')/N$  per  $N \rightarrow \infty$ ).

Calcoliamo ora il *propagatore infinitesimo*  $\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} e^{-\lambda \hat{V}/N} | x_j \rangle$ . È evidente che qui  $\hat{V}$  non è altro che  $V(x)$ , quindi

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} e^{-\lambda \hat{V}/N} | x_j \rangle = e^{-\lambda V(x_j)/N} \langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} | x_j \rangle. \quad (2.10)$$

Analogamente alla eq. (2.7), per gli autostati dell'operatore impulso (in descrizione di Schrödinger)  $|p\rangle$  abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp |p\rangle \langle p| = 1 \quad (2.11)$$

che ci permette di scrivere

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} | x_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_j \langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} | p_j \rangle \langle p_j | x_j \rangle. \quad (2.12)$$

Nel caso in questione  $\hat{T} = \hat{p}^2/2m$ , che (per definizione) è diagonale nella rappresentazione dell'impulso, cosicché

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} | p_j \rangle = e^{-\lambda p_j^2/2mN} \langle x_{j+1} | p_j \rangle. \quad (2.13)$$

Inserendo l'eq. (2.13) nell'eq. (2.12) otteniamo

---

<sup>13</sup> Sottolineiamo il fatto che la presenza di un indice nell'eq. (2.9) è pura conseguenza dell'uso *ripetuto* dell'eq. (2.7).

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} | x_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dp_j e^{-\lambda p_j^2 / 2mN} \langle x_{j+1} | p_j \rangle \langle p_j | x_j \rangle. \quad (2.14)$$

Ma  $\langle x | p \rangle$  è l'autofunzione dell'impulso (corrispondente all'autovalore  $p$ ) nella rappresentazione delle coordinate, cioè

$$\langle x | p \rangle = \varphi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \hbar}} e^{ipx / \hbar} \quad (2.15)$$

quindi possiamo riscrivere l'eq. (2.14) come

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} | x_j \rangle = \frac{1}{2\pi \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_j e^{-\lambda p_j^2 / 2mN} e^{ip_j(x_{j+1} - x_j) / \hbar}. \quad (2.16)$$

L'integrale che figura nell'eq. (2.16) è *gaussiano* e può essere calcolato facilmente usando la ben nota formula <sup>14</sup>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-ay^2 + by} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2 / 4a}. \quad (2.17)$$

Otteniamo

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} | x_j \rangle = \left[ \frac{mN}{2\pi \hbar^2 \lambda} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2} (x_{j+1} - x_j)^2 N / \lambda \hbar^2 \right\}. \quad (2.18)$$

A questo punto è conveniente porre

$$\epsilon \equiv \frac{(t'' - t')}{N}. \quad (2.19)$$

---

<sup>14</sup> Va tenuto presente che nell'eq. (2.17) sia  $a$  che  $b$  sono numeri *immaginari*, per cui è necessario effettuare una continuazione analitica. Essa è a *due* valori, dando così luogo ad una ambiguità di fase. Si ottiene tuttavia il risultato corretto anche procedendo in modo ingenuo. Questo punto è spiegato in: B. Felsager, *Geometry, Particles and Fields* (Odense University press, Odense, 1981).

Inserendo l'eq. (2.18) nell'eq. (2.10) ed usando le eq. (2.3) e (2.19) abbiamo infine l'espressione *esplicita* del propagatore infinitesimo

$$\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} e^{-\lambda \hat{V}/N} | x_j \rangle = \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right]^{1/2} \cdot \exp \left\{ (i/\hbar) \epsilon \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\}. \quad (2.20)$$

Questa espressione del propagatore infinitesimo è stata suggerita per la prima volta da Dirac <sup>15</sup>. Non era invece chiaro a Dirac come ottenere il propagatore relativo ad un intervallo di tempo *finito* <sup>16</sup>. Oggi sappiamo – *per merito di Feynman* – che  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  è dato da *infinite convoluzioni* del propagatore infinitesimo, secondo l'eq. (2.9) (come abbiamo visto, ciò deriva dalla formula di Trotter). Esplicitamente, è ora sufficiente inserire  $\langle x_{j+1} | e^{-\lambda \hat{T}/N} e^{-\lambda \hat{V}/N} | x_j \rangle$  – dato dall'eq. (2.20) – nell'eq. (2.9) <sup>17</sup>:

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right]^{N/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right) \cdot \prod_{j=0}^{N-1} \exp \left\{ (i/\hbar) \epsilon \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\}. \quad (2.21)$$

Ma

$$\prod_{j=0}^{N-1} \exp \left\{ (i/\hbar) \epsilon \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\} = \exp \left\{ (i/\hbar) \epsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\} \quad (2.22)$$

<sup>15</sup> P. A. M. Dirac, Phys. Zeit. der Sowjetunion **3**, 64 (1933). Questo articolo è ristampato in: *Selected Papers in Quantum Electrodynamics*, J. Schwinger ed. (Dover, New York, 1958). Si veda anche: P. A. M. Dirac, *I Principi della Meccanica Quantistica* (IV ed.) (Boringhieri, Torino, 1959), cap. 32.

<sup>16</sup> È a questa circostanza che si riferisce l'aneddoto riportato nella nota 6 (ritorneremo su questo punto nel capitolo 4).

<sup>17</sup> È evidente dall'eq. (2.19) che il limite  $N \rightarrow \infty$  implica  $\epsilon \rightarrow 0$  (e viceversa), in quanto l'intervallo di tempo considerato  $t'' - t'$  è *fisso*. Per maggior chiarezza indicheremo entrambi i limiti, nonostante essi *non* siano indipendenti.

per cui otteniamo in definitiva

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right]^{N/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right) \cdot \\ &\exp \left\{ (i/\hbar)\epsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Questa è l'*espressione finale* del propagatore quantistico come *integrale di Feynman*. Vedremo nel paragrafo successivo che l'eq. (2.23) può essere riscritta in modo più compatto ed elegante. Tuttavia è bene tenere sempre presente che ogni altra espressione equivalente *non* ha alcun significato diverso da quello mostrato *esplicitamente* dall'eq. (2.23).

2.3 – A questo punto il lettore potrebbe chiedersi (giustamente!) dove siano i “*cammini di Feynman*”<sup>18</sup>.

Al fine di rispondere a questa domanda è conveniente porre

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle_{N,\epsilon} &\equiv \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right]^{N/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{i=1}^{N-1} dx_i \right) \cdot \\ &\exp \left\{ (i/\hbar)\epsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\epsilon} \right)^2 - V(x_j) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

cosicché l'eq. (2.23) assume la forma

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \langle x'', t'' | x', t' \rangle_{N,\epsilon}. \quad (2.25)$$

Discretizziamo ora l'intervallo di tempo considerato  $t'' - t'$  mediante  $N - 1$  punti intermedi equidistanti  $t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$  spazati di  $\epsilon$  ( $t_i = t_0 + i\epsilon$ ,  $t_0 \equiv t'$ ,  $t_N \equiv t''$ ,  $0 \leq i \leq N$ ) (si noti che questa discretizzazione era già stata usata *implicitamente* nell'applicare la formula di Trotter). Ragionando nello spazio delle configurazioni *esteso*  $(x, t)$ <sup>19</sup>, il generico insieme di punti

<sup>18</sup> Talvolta essi sono anche detti *storie*.

<sup>19</sup> E esso si ottiene rappresentando geometricamente il tempo come *ulteriore* coordinata.

$\{x', x_1, \dots, x_k, \dots, x_{N-1}, x''\}$  che figura nell'eq. (2.24) può essere interpretato come l'insieme dei vertici di una *spezzata*<sup>20</sup>  $\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots)$  definita nel modo seguente

$$\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots) \equiv \{x(t') \equiv x', x(t_1) \equiv x_1, \dots, x(t_k) \equiv x_k, \dots, x(t_{N-1}) \equiv x_{N-1}, x(t'') \equiv x''\}. \quad (2.26)$$

Indichiamo con  $\mathcal{C}_{N,\epsilon}(x', t'; x'', t'')$  l'insieme di *tutte* le  $\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots)$  con estremi fissi  $x(t') \equiv x', x(t'') \equiv x''$ . Dato che  $\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots)$  è completamente caratterizzata dai suoi vertici, l'eq. (2.24) non è altro che la *somma* di  $\exp\{\dots\}$  su  $\mathcal{C}_{N,\epsilon}(x', t'; x'', t'')$ . Alla luce di questa osservazione è conveniente riscrivere l'eq. (2.24) come

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle_{N,\epsilon} = \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right]^{N/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{i=1}^{N-1} dx(t_i) \right) \cdot \exp \left\{ (i/\hbar)\epsilon \sum_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{\epsilon} \right)^2 - V(x(t_j)) \right] \right\}. \quad (2.27)$$

Ricordando che (nel caso in questione) l'azione classica calcolata lungo una arbitraria traiettoria  $x(t)$  è

$$S[x(\cdot)]_{t'}^{t''} = \int_{t'}^{t''} dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 - V(x(t)) \right] \quad (2.28)$$

scopriamo che la sommatoria nell'eq. (2.27) è proprio l'*azione classica* calcolata lungo la spezzata  $\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots)$ . Quindi possiamo scrivere

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle_{N,\epsilon} = \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right]^{N/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \prod_{i=1}^{N-1} dx(t_i) \right) \cdot \exp \left\{ (i/\hbar) S[\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots)]_{t'}^{t''} \right\}. \quad (2.29)$$

---

<sup>20</sup> Come *spezzata* intendiamo un insieme discreto di punti uniti da segmenti. Una curva ordinaria può essere definita specificando i suoi punti in funzione di una variabile indipendente  $t$ . Analogamente si può fare per una spezzata, solo che ora l'insieme dei punti (vertici) è discreto anziché continuo.

Naturalmente quanto detto vale per  $N$  arbitrario. Consideriamo ora il limite  $N \rightarrow \infty$  ( $\epsilon \rightarrow 0$ ). Al crescere di  $N$  una spezzata  $\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots)$  approssima viepiù una curva continua  $x(t)$  (con gli stessi estremi), fino a coincidere con questa nel limite  $N \rightarrow \infty$ . Pertanto l'insieme  $\mathcal{C}_{N,\epsilon}(x', t'; x'', t'')$  diventa lo *spazio dei cammini*  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ , cioè l'insieme delle funzioni (reali) continue  $x(t)$  con estremi fissi  $x(t') \equiv x'$ ,  $x(t'') \equiv x''$ . Quindi nel limite  $N \rightarrow \infty$  l'eq. (2.29) da somma su  $\mathcal{C}_{N,\epsilon}(x', t'; x'', t'')$  diventa una *somma* su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ . È altresì evidente che <sup>21</sup>

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} S[\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots)]_{t'}^{t''} = S[x(\cdot)]_{t'}^{t''} \quad (2.30)$$

cosicché dalle eq. (2.25), (2.29) e (2.30) otteniamo

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \int \mathcal{D}x(t) \delta(x'' - x(t'')) \delta(x' - x(t')) \cdot \\ &\quad \exp \left\{ (i/\hbar) S[x(\cdot)]_{t'}^{t''} \right\}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

avendo posto (molto formalmente!)

$$\mathcal{D}x(t) \equiv \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \epsilon \rightarrow 0}} \left[ \frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right]^{N/2} \prod_{i=1}^{N-1} dx(t_i). \quad (2.32)$$

Le due funzioni delta di Dirac nell'eq. (2.31) servono unicamente ad indicare in modo esplicito che si sta sommando su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ . Molto spesso, la rappresentazione di Feynman del propagatore quantistico è scritta proprio nella forma (2.31) <sup>22</sup>.

Siamo così giunti in modo naturale al concetto di “*somma sui cammini*” come *limite di infiniti integrali ordinari*. È invalso l'uso di parlare a questo proposito di *integrale di Feynman* (uso a cui del resto anche noi ci siamo attenuti). Va però precisato che tale denominazione è *impropria*, perché

<sup>21</sup> Si noti che  $S[\Gamma_N(\dots, x(t_k), \dots)]$  è una somma di Cauchy-Riemann. Inoltre  $S[x(\cdot)]$  nel secondo membro dell'eq. (2.30) è un *integrale di Riemann*. Avvertiamo però il lettore che questo secondo fatto *non* è una conseguenza *ovvia* del primo (questo punto verrà chiarito nel paragrafo 2.6).

<sup>22</sup> Per ovvi motivi, l'eq. (2.31) è spesso detta forma *lagrangiana* dell'integrale di Feynman. Ne esiste anche una (equivalente) forma *hamiltoniana*. Strutturalmente, quest'ultima è molto simile all'eq. (2.31), ma vi sono due differenze essenziali: (i) i *cammini* sono ora funzioni a valori nello *spazio delle fasi* (anziché nello spazio delle configurazioni); (ii) l'azione  $S[x(\cdot)]$  scritta in termini della lagrangiana è sostituita dalla (stessa) azione  $S[x(\cdot), p(\cdot)]$  definita sullo spazio delle fasi, in cui compare l'*hamiltoniana*. Oltre al già citato testo di Schulman, si veda anche: C. Garrod, Rev. Mod. Phys. **38**, 483 (1966).



esso *non* è (da un punto di vista matematico) un'integrale su uno spazio di funzioni <sup>23</sup> (integrale funzionale). Più semplicemente, in questo contesto la parola integrale (ed il relativo simbolo) è da intendersi *solo* come sinonimo di *somma* (su un insieme di funzioni). Ulteriormente – per quanto suggestiva l'eq. (2.31) possa apparire – va ricordata l'osservazione fatta alla fine del paragrafo precedente.

Benché l'eq. (2.31) sia stata derivata qui nel caso unidimensionale in cui è presente solo un potenziale scalare stazionario  $V(x)$ , essa vale anche nel caso multidimensionale per un'azione classica del tipo <sup>24</sup>

$$S[x(\cdot)]_{t'}^{t''} = \int_{t'}^{t''} dt \left[ \frac{1}{2} m \dot{x}_i(t) \dot{x}_i(t) + \Omega_i(x(t), t) \dot{x}_i(t) - \Phi(x(t), t) \right]. \quad (2.33)$$

L'eq. (2.31) corrispondente a quest'ultima forma dell'azione classica va ancora definita come limite di un'espressione discretizzata, molto simile a quella che figura nell'eq. (2.23). Vi è però un'*importante differenza*. Nell'espressione (2.20) del propagatore infinitesimo fra  $x_j$  e  $x_{j+1}$ ,  $V(x)$  è calcolato in  $x_j$ . Ora invece  $\Omega(x, t)$  va calcolato nel *punto intermedio*  $\bar{x}_j \equiv (x_j + x_{j+1})/2$  nell'analogia espressione del propagatore infinitesimo. Ciò si riflette nell'identica prescrizione per quanto concerne la forma discretizzata dell'eq. (2.31) (simile all'eq. (2.23)) <sup>25</sup> (a questo proposito si veda l'articolo tradotto).

<sup>23</sup> Ciò è stato dimostrato in: R. H. Cameron, J. Math. and Phys. **39**, 126 (1960). Sottolineiamo che le difficoltà matematiche menzionate all'inizio del paragrafo 2.2 traggono origine proprio da questo fatto.

<sup>24</sup> È immediato accorgersi che questa azione classica ha la forma tipica dell'interazione di una particella con un campo elettromagnetico o gravitazionale esterno nell'approssimazione semirelativistica. In realtà, l'eq. (2.31) vale anche per azioni classiche  $S[x(\cdot)]$  *più generali* dell'eq. (2.33). Un esempio è quello di spazio delle configurazioni *curvo*. Rimandiamo il lettore al testo di Schulman. È opportuno tenere presente che l'eq. (1.11) vale *solo* se l'hamiltoniana *non* dipende dal tempo (invece l'eq. (1.14) ha validità generale).

<sup>25</sup> L'origine matematica di questo fatto verrà spiegata nel paragrafo 2.6. Discutiamo qui invece il suo *significato fisico* (si tratta di una tipica situazione in cui una difficoltà matematica ha una radice fisica). Un problema che ha preoccupato i fondatori della teoria quantistica è l'esistenza delle cosiddette *ambiguità di quantizzazione*. Si supponga che nell'hamiltoniana *classica* compaia un termine in cui l'impulso è moltiplicato per una funzione delle coordinate (questo è effettivamente quanto avviene nel caso descritto dall'azione (2.33)). Come è ben noto, la corrispondente hamiltoniana *quantistica* si ottiene sostituendo gli operatori alle grandezze classiche. Ora, gli operatori posizione e impulso *non* commutano, quindi vi sono *più* hamiltoniane quantistiche distinte associate alla *stessa* hamiltoniana classica. Senza ulteriori argomenti (ritorneremo su questo punto più avanti in questa nota) è privo di significato chiedersi quale di esse sia l'hamiltoniana "giusta", perché esse sono concettualmente sullo stesso piano, nonostante portino a risultati diversi. Qual'è l'origine di queste ambiguità? Storicamente, vi è stata una notevole confusione al proposito. Inizialmente si riteneva che esse fossero una *pura conseguenza* dell'uso degli operatori.

D'ora in poi considereremo il caso generale di uno spazio delle configurazioni *multidimensionale*. Al fine di semplificare la notazione, *eviteremo di usare simboli vettoriali o indici* ogniqualevolta ciò non dia luogo a fraintendimenti.

2.4 – Ci sembra molto istruttivo confrontare la derivazione dell'eq. (2.31) presentata nel paragrafo 2.2 con la strategia seguita originariamente da Feynman (essa è discussa nell'articolo tradotto). Come abbiamo già sottolineato, egli *non* parte dalla formulazione operatoriale della teoria quantistica, bensì procede in modo euristico: estende il principio di sovrapposizione delle ampiezze e sviluppa un'osservazione – dovuta a Dirac<sup>26</sup> – sul ruolo dell'azione classica in meccanica quantistica. Cercheremo di riassumere (in modo molto schematico) i punti nodali di tale approccio.

Consideriamo una particella  $\mathcal{S}$  descritta dall'azione classica (2.33) e fissiamo l'attenzione sull'evento  $A$  “ $\mathcal{S}$  va da  $(x', t')$  a  $(x'', t'')$ ”. Si noti che l'ampiezza (totale)  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  associata a questo evento non è altro che il *propagatore* dell'equazione di Schrödinger (nelle variabili  $x'', t''$ ). A questo

---

Successivamente ci si è però resi conto che ciò non poteva essere vero: infatti la meccanica classica può venire espressa in un linguaggio *operatoriale* molto simile a quello quantistico (B. O. Koopman, Proc. Nat. Acad. Sci. **17**, 315 (1931); J. Von Neumann, Ann. of Math. **33**, 587 (1932)), mentre la meccanica quantistica può essere formulata nello *spazio delle fasi* analogamente alla meccanica classica (E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932); J. E. Moyal, Proc. Camb. Phil. Soc. **45**, 99 (1949); M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully and E. P. Wigner, Phys. Rep. **106**, 121 (1984)). L'origine delle suddette ambiguità è dovuto in realtà all'*assenza di isomorfismo* fra i gruppi delle trasformazioni canoniche classiche e quantistiche (indipendentemente dalla *rappresentazione* di tali gruppi nell'ambito della *specificata* formulazione della teoria) (L. Van Hove, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. Mém. (5) **37**, 610 (1951); T. F. Jordan and E. C. G. Sudarshan, Rev. Mod. Phys. **33**, 515 (1961)). Ciò nonostante è stato ripetutamente affermato che l'integrale di Feynman *elimina* le ambiguità di quantizzazione, dato che esso non contiene operatori (citiamo un solo esempio: E. Kerner and W. Sutcliffe, J. Math. Phys. **11**, 391 (1970))! Come vedremo nel paragrafo 2.6, queste ambiguità sono presenti in *ugual misura* nella formulazione di Feynman, anche se compaiono in forma meno evidente. Il primo calcolo esplicito che mostra la *non* invarianza dell'integrale di Feynman sotto trasformazioni canoniche classiche è stato dato da: S. F. Edwards and Y. V. Gulyaev, Proc. Roy. Soc. A **279**, 229 (1964). Per una discussione molto chiara e generale si veda: J. L. Gervais and A. Jevicki, Nucl. Phys. **B110**, 93 (1976). Si pone quindi il problema di scegliere *una* hamiltoniana quantistica. Nel caso dell'azione classica (2.33) la richiesta che la corrispondente equazione di Schrödinger sia invariante sotto trasformazioni di gauge determina *univocamente* l'hamiltoniana quantistica. Anticipiamo che a livello dell'integrale di Feynman ciò equivale proprio alla prescrizione del *punto medio* menzionata nel testo. La situazione è meno semplice nel caso di una particella (non relativistica) in spazio curvo. Qui è piuttosto naturale richiedere l'invarianza dell'equazione di Schrödinger sotto trasformazioni generali di coordinate. Tuttavia questo criterio *non* è sufficiente per fissare univocamente l'hamiltoniana quantistica. Se invece si considera la meccanica quantistica *supersimmetrica* (E. Witten, Nucl. Phys. **B188**, 513 (1981)) l'invarianza sotto supersimmetria e trasformazioni generali di coordinate determina *completamente* l'hamiltoniana quantistica (V. De Alfaro, S. Fubini, G. Furlan and M. Roncadelli, Nucl. Phys. **B296**, 402 (1988); V. De Alfaro and G. Gavazzi, Nucl. Phys. **B335**, 655 (1990)).

<sup>26</sup> Si veda la nota 15.

punto, il primo postulato di Feynman è <sup>27</sup>

F1) Tutte le *alternative disgiunte* <sup>28</sup> secondo le quali l'evento  $A$  può realizzarsi sono descritte da *cammini*  $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ .

Nella formulazione usuale della teoria quantistica si associa una *ampiezza di probabilità* (la funzione d'onda!) alla posizione di una particella ad un *particolare* istante. L'*idea fondamentale* di Feynman è di associare un' *ampiezza di probabilità* ad ogni *alternativa disgiunta* relativa all'evento in questione. Ne consegue che egli postula l'esistenza della seguente *ampiezza di transizione* associata ad un *intero cammino*  $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] \equiv \left( \begin{array}{l} \text{ampiezza che } \mathcal{S} \\ \text{si muova lungo } x(t) \end{array} \right). \quad (2.34)$$

Questa grandezza ha la struttura

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] \equiv \delta(x'' - x(t'')) \delta(x' - x(t')) A[x(\cdot)] \quad (2.35)$$

in cui le due funzioni delta di Dirac implicano che tale ampiezza si annulli – come è ovvio che debba essere – qualora si abbia  $x(t') \neq x'$  e/o  $x(t'') \neq x''$  <sup>29</sup>. Nell'eq. (2.35)  $A[x(\cdot)]$  è un funzionale <sup>30</sup> continuo determinato dal secondo postulato

F2) Il *modulo* di  $A[x(\cdot)]$  è *uguale* per *tutti* i cammini  $x(t)$ , mentre la *fase* è data dall'*azione classica*  $S[x(\cdot)]_{t'}^{t''}$  associata a  $x(t)$  (in unità di  $\hbar$ ). Vale a dire

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] = \delta(x'' - x(t'')) \delta(x' - x(t')) \cdot \exp \left\{ (i/\hbar) S[x(\cdot)]_{t'}^{t''} \right\}. \quad (2.36)$$

<sup>27</sup> Come risulta chiaro dall'articolo tradotto, questo postulato non è enunciato esplicitamente da Feynman, però viene assunto implicitamente. Tuttavia esso è essenziale da un punto di vista logico.

<sup>28</sup> Useremo per semplicità l'espressione *alternative disgiunte*, mentre dovremmo parlare più propriamente di *alternative indipendenti mutuamente esclusive*.

<sup>29</sup> In altre parole, la presenza delle due funzioni delta di Dirac nell'eq. (2.35) è necessaria affinché  $x(t)$  appartenga effettivamente a  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ .

<sup>30</sup> Ci sembra opportuno richiamare il concetto di *funzionale*. Tutti sanno che una *funzione* è una regola per associare un numero ad un altro *numero*: essa è quindi definita su un *insieme numerico*. Analogamente, un *funzionale* è una regola per associare un numero ad una *funzione*: esso è pertanto definito su un *insieme di funzioni*. Un'ottima introduzione al calcolo funzionale in vista delle applicazioni ai processi stocastici (che discuteremo nei capitoli 3 e 5) è contenuta in: P. Hänggi, *The Functional Derivative and its Use in the Description of Noisy Dynamical Systems*, in *Stochastic Processes Applied to Physics* (ed. by L. Pesquera and M. A. Rodriguez) (World Scientific, Singapore, 1984).

Ovviamente nel nostro caso l'azione classica è fornita dall'eq. (2.33).

È ben noto che le ampiezze quantistiche – convenzionalmente associate alla posizione *istantanea* di una particella – soddisfano il *principio di sovrapposizione*. Avendo associato un'ampiezza ad un *intero* cammino  $x(t)$ , è naturale supporre che il principio di sovrapposizione *continui a valere* (si veda la discussione dell'esperimento di diffrazione da doppia fenditura nell'articolo tradotto). Ora, tale principio di sovrapposizione generalizzato implica che l'ampiezza (totale)  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  per l'evento  $A$  debba essere la *somma* delle ampiezze  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$  relative ad ogni singola alternativa disgiunta. Di conseguenza – in virtù del postulato F1 – il terzo postulato di Feynman è

F3) Il *propagatore quantistico* è dato da

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]. \quad (2.37)$$

Sostituendo infine l'eq. (2.36) nell'eq. (2.37) ritroviamo proprio l'eq. (2.31)!

2.5 – Non resistiamo alla tentazione di discutere la natura dei “*cammini di Feynman*” (peraltro questo è proprio il soggetto principale del presente Quaderno!) in modo più esauriente di quanto usualmente venga fatto ( a tale argomento è dedicato il presente paragrafo ed i tre successivi).

È ben noto che il modo migliore per evitare i famosi “paradossi” quantistici è di dimenticarsi dell'idea classica che una particella si muova lungo una traiettoria *definita* – ciò è infatti incompatibile col principio di indeterminazione. Viene quindi spontaneo chiedersi se i cammini di Feynman abbiano un *significato fisico*.

Al fine di chiarire questo punto è opportuno considerare ancora l'ampiezza  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$  definita dall'eq. (2.34). Ragionando in termini più geometrici,  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$  può anche venir interpretata come *ampiezza per il particolare cammino*  $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ , cosicché una distribuzione di *ampiezza* risulta definita sullo spazio dei cammini<sup>31</sup>. Scegliamo ora un sottoinsieme  $\mathcal{R}$  di  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ . Grazie al principio di sovrapposizione generalizzato, l'ampiezza che un (generico) cammino  $\bar{x}(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$  sia contenuto in  $\mathcal{R}$  è data da

$$\text{amp} \{ \bar{x}(t) \in \mathcal{R} \} = \int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]. \quad (2.38)$$

Sappiamo però che il modulo quadrato di un'ampiezza è sempre una probabilità, quindi abbiamo evidentemente

---

<sup>31</sup> Quanto detto nella nota 7 vale naturalmente anche nel caso di distribuzioni di ampiezza o di probabilità su uno spazio di funzioni. Ometteremo quindi l'attributo *densità*.

$$\begin{aligned} \text{prob} \{ \bar{x}(t) \in \mathcal{R} \} &= |\text{amp} \{ \bar{x}(t) \in \mathcal{R} \}|^2 = \\ &= \left| \int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] \right|^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Un'importante conseguenza dell'eq. (2.39) è che *non* esiste alcuna distribuzione *classica* di *probabilità* definita su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ . A prima vista, questa affermazione può apparire strana. Infatti, dall'eq. (2.34) segue<sup>32</sup>

$$\begin{aligned} P_q(x'', t'' | x', t')[x(\cdot)] &\equiv |\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]|^2 = \\ &= \left( \begin{array}{l} \text{probabilità che } \mathcal{S} \\ \text{si muova lungo } x(t) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

che (analogamente a  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$ ) può essere reinterpretata come *probabilità per il particolare cammino*  $x(t)$ . A questo punto però secondo il calcolo *classico* delle probabilità si dovrebbe avere<sup>33</sup>

$$\begin{aligned} \text{prob} \{ \bar{x}(t) \in \mathcal{R} \} &= \int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}x(t) P_q(x'', t'' | x', t')[x(\cdot)] = \\ &= \int_{\mathcal{R}} \mathcal{D}x(t) |\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]|^2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

che è manifestamente *incompatibile* con l'eq. (2.39).

Concludiamo che la *non* validità del calcolo *classico* delle probabilità in meccanica quantistica<sup>34</sup> implica che i cammini di Feynman *non* possano essere visti come possibili traiettorie descritte da una particella in accordo col *senso comune*<sup>35</sup>. Usando un'espressione di Feynman, si deve pensare che una

<sup>32</sup> È evidente che se inserissimo l'eq. (2.36) nell'eq. (2.40) otterremmo un'espressione matematicamente priva di significato, a causa del quadrato delle funzioni delta di Dirac. Tuttavia questo problema può essere evitato omettendo tali funzioni delta nell'eq. (2.36), a patto di restringere l'attenzione alle sole  $x(t)$  che appartengono a  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$  (si tenga presente la nota 29).

<sup>33</sup> Questo punto verrà discusso nel paragrafo 3.9.

<sup>34</sup> Questa circostanza è stata sottolineata ripetutamente da Feynman. Vogliamo aggiungere un'osservazione un po' polemica. Se il calcolo classico delle probabilità non vale nella teoria quantistica, come è possibile pretendere che questa sia equivalente ad una cosiddetta *teoria locale di variabili nascoste*? (Per questa problematica si veda il Quaderno di Fisica Teorica: O. Nicrosini, *Paradosso EPR e Teorema di Bell* (1991)).

<sup>35</sup> È stato ripetutamente affermato che i cammini di Feynman sono "reali" e che rappresentano "traiettorie medie" del moto (vedasi ad es.: P. Holland, A. Kyprianidis and J. Vigier, *Found. Phys.* **17**, 531 (1987)). Non riusciamo a capire cosa ciò voglia dire!

particella segua “tutti i cammini simultaneamente”! In realtà, la mancanza di un’interpretazione fisica intuitiva per questi cammini non deve stupire: infatti è ben noto che in meccanica quantistica *non* si possono attribuire proprietà fisiche ben definite ad oggetti *non osservati*<sup>36</sup>.

2.6 – Una precisazione è ora quanto mai opportuna. Da quanto detto, il lettore potrebbe farsi l’idea che i *cammini di Feynman* – vale a dire quei cammini che contribuiscono *effettivamente* nell’eq. (2.31) – siano *tutte* le funzioni  $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ . Ciò è *falso*! Si può infatti dimostrare (si veda l’articolo tradotto) che *soltanto* quei particolari cammini che godono della proprietà

$$\Delta x(t) \sim (\Delta t)^{1/2} \quad (2.42)$$

( $\Delta t$  molto piccolo) danno un contributo *non nullo* all’integrale di Feynman. Un modo euristico per rendersi conto di questo fatto è di ritornare all’eq. (2.23), scrivendo  $x_j \equiv x(t_j)$  (come spiegato nel paragrafo 2.3). È evidente che nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  si ottiene un risultato *finito* solo nel caso in cui la grandezza  $|x(t_{j+1}) - x(t_j)|^2/\epsilon$  si mantiene *finita*, ma ciò implica proprio l’eq. (2.42). È altresì chiaro che il contributo di cammini che *non* soddisfano l’eq. (2.42) scompare nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$  (se  $|x(t_{j+1}) - x(t_j)|^2/\epsilon$  diverge, il meccanismo per cui ciò avviene è molto simile a quello considerato nel paragrafo successivo). Ora, l’eq. (2.42) implica che la funzione  $x(t)$  – seppur continua – *non* sia differenziabile per alcun valore di  $t$ . Concludiamo che i cammini di Feynman sono *frattali* con dimensione di Hausdorff uguale a *due*<sup>37, 38</sup>. Qualitativamente, essi sono identici alle traiettorie a zig-zag tipiche del moto browniano (ritorneremo su questo punto in seguito). Osservando tali traiettorie, si nota immediatamente il loro carattere fluttuante: esse appaiono come se il punto rappresentativo fluttuasse casualmente intorno ad una traiettoria liscia. È facile rendersi conto che questo fatto *segue* proprio dall’eq. (2.42). Consideriamo infatti una curva *liscia*  $x(t)$ , vale a dire una funzione *differenziabile* del tempo. Avremo allora (per  $\Delta t$  molto piccolo)

$$\Delta x(t) = O(\Delta t) \quad (2.43)$$

mentre per i cammini di Feynman dall’eq. (2.42) segue

---

<sup>36</sup> Vogliamo mettere in chiaro che *tutta* la discussione fatta nel presente Quaderno si riferisce (salvo *esplicito* avviso) a sistemi quantistici *non* osservati.

<sup>37</sup> Il concetto di *frattale* è entrato ormai nella cultura scientifica di ogni fisico. Un’esposizione divulgativa è contenuta in: B. Mandelbrot, *Gli Oggetti Frattali* (Einaudi, Torino, 1987).

<sup>38</sup> Si noti che questo fatto *non* è in contraddizione col postulato F1. Semplicemente, l’ampiezza che  $\mathcal{S}$  si muova lungo molti dei cammini *a priori* possibili è di fatto *nulla*.

$$\Delta x(t) = O((\Delta t)^{1/2}). \quad (2.44)$$

Ma essendo  $\Delta t$  una quantità molto piccola ( $\Delta t \ll 1$ ), è evidente che

$$O((\Delta t)^{1/2}) \gg O(\Delta t) \quad (2.45)$$

per cui una funzione  $x(t)$  che soddisfi la condizione (2.42) varia *molto più rapidamente* (rispetto a  $t$ ) di una funzione  $x(t)$  che sia differenziabile. Ciò spiega il *carattere fluttuante* dei cammini di Feynman.

L'esistenza di tali *fluttuazioni* è concettualmente molto importante, perché esse rappresentano gli *effetti quantistici* nell'evoluzione temporale descritta dall'integrale di Feynman. Come è spiegato nell'articolo tradotto, l'eq. (2.42) è *equivalente* al *principio di indeterminazione*! Di fatto, che quest'ultimo e la proprietà (2.42) siano aspetti diversi della *stessa* realtà appare chiaro in un contesto diverso<sup>39</sup>. Se si misura la traiettoria di una particella, si vede che le limitazioni dettate dal principio di indeterminazione implicano proprio la validità dell'eq. (2.42)<sup>40, 41</sup>!

Un'ulteriore conseguenza dell'eq. (2.42) è l'esistenza delle *ambiguità di quantizzazione* nell'integrale di Feynman. Supponiamo infatti di inserire l'azione classica (2.33) nell'eq.(2.31), ed immaginiamo di considerare la corrispondente espressione discretizzata (assumiamo per semplicità che i potenziali siano stazionari). Quest'ultima differisce dall'eq. (2.23) per un termine del tipo  $(x_{j+1} - x_j)\Omega(x_j^*)/\epsilon$  sotto il segno di sommatoria nell'esponente – l'asterisco indica che non è chiaro in quale particolare punto dell'intervallo

<sup>39</sup> *Diverso* in quanto ciò che segue presuppone che una *misurazione* venga effettuata sulla particella.

<sup>40</sup> Questo risultato è discusso in: L. Abbott and M. Wise, Am. J. Phys. **49**, 37 (1981).

<sup>41</sup> Una questione molto interessante è la seguente. Sostituendo l'eq. (2.36) nell'eq. (2.40) ed adottando le precauzioni discusse nella nota 32, si ottiene  $P_q(x'', t''|x', t')[x(\cdot)] = 1$  *qualunque* sia  $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ ! Benché a prima vista ciò possa apparire *assurdo*, non è così. Ricordiamo (preliminarmente) che se si *misura* la posizione *istantanea* di una particella al tempo  $t$  e ci si chiede quale sia la (densità di) probabilità di ottenere un particolare valore  $\bar{x}$ , la risposta è data da  $P_q(\bar{x}, t) = |\psi(\bar{x}, t)|^2$ . Supponiamo ora di effettuare una *misura continua* per stabilire quale sia la (densità di) probabilità che la particella si muova lungo un particolare cammino  $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$  ( $t' \leq t \leq t''$ ). Naturalmente al posto di  $\psi(\bar{x}, t)$  abbiamo ora  $\langle x'', t''|x', t' \rangle[\bar{x}(\cdot)]$ , cosicché la risposta è data analogamente da  $P_q(x'', t''|x', t')[\bar{x}(\cdot)] = |\langle x'', t''|x', t' \rangle[\bar{x}(\cdot)]|^2$ . Ma abbiamo visto che  $P_q(x'', t''|x', t')[\bar{x}(\cdot)] = 1$ , il che significa che la particella segue con *certezza* la traiettoria che si misura! Un'analisi operativa della situazione considerata mostra che le cose stanno proprio così (Y. Aharonov and M. Vardi, Phys. Rev. D **21**, 2235 (1980)). Una discussione approfondita del concetto di *misurazione continua* in meccanica quantistica è contenuta in: A. Barchielli, L. Lanz and G. M. Prosperi, Nuovo Cimento **72B**, 79 (1982); A. Barchielli and V. P. Belavkin, J. Phys. **A24**, 1495 (1991). Una domanda sorge spontanea. È il cosiddetto *paradosso quantistico di Zenone* (G. R. Allcock, Ann. Phys. **53**, 251 (1969); B. Misra and E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **18**, 756 (1977)) una conseguenza del fatto che  $P_q(x'', t''|x', t')[x(\cdot)] = 1$ ?

$x_{j+1} - x_j$  vada calcolato  $x_j^*$ . Abbiamo visto che nel caso dell'azione classica (2.28) tale sommatoria è una tipica somma di Cauchy-Riemann che definisce  $S[x(\cdot)]$  come *integrale di Riemann*. Chiaramente, se questa circostanza continuasse ad essere vera, il risultato *non* dovrebbe dipendere dalla particolare scelta di  $x_j^*$ : questa è infatti una proprietà fondamentale dell'integrale di Riemann. Notiamo in particolare che le due somme corrispondenti alle due situazioni estreme  $x_j^* = x_j$  e  $x_j^* = x_{j+1}$  differiscono per termini  $O((x_{j+1} - x_j)^2)$ . Ora, se i cammini di Feynman fossero funzioni *differenziabili* del tempo – cioè tali per cui  $x_{j+1} - x_j \sim \epsilon$  – esse differirebbero per termini  $O(\epsilon^2)$ , che sarebbero *irrilevanti* in quanto infinitesimi di ordine superiore. Sappiamo però che per i cammini di Feynman vale la proprietà (2.42), quindi le due somme suddette differiscono in realtà per termini  $O(\epsilon)$ , che *contribuiscono* al risultato. Siamo così giunti ad un'importante conclusione. Da un punto di vista matematico, vediamo che nel caso dell'azione classica (2.33) l'integrale d'azione che figura nell'eq. (2.31) *non* è più un integrale di Riemann, perché le somme che lo definiscono *dipendono* dalla particolare scelta di  $x_j^*$  (si tratta di un oggetto molto simile agli *integrali stocastici* che incontreremo nel paragrafo 3.9). Sul piano fisico, l'eq. (2.31) *non* fornisce più il propagatore quantistico in modo *univoco*, dato che è necessario specificare in che modo vada scelto  $x_j^*$  nella discretizzazione che la definisce – ecco come le ambiguità di quantizzazione nascono nell'approccio di Feynman <sup>42</sup>!

2.7 – È ben noto che la meccanica quantistica contiene la meccanica classica come caso limite. Ciò significa che quando  $\hbar$  risulta *molto minore* di qualunque altra grandezza in gioco (avente le dimensioni di un'azione), gli effetti quantistici scompaiono ed il comportamento classico emerge.

Un vantaggio della formulazione di Feynman è di permettere una comprensione *intuitiva* del limite classico.

Fissiamo l'attenzione sull'eq. (2.31) e supponiamo che in una situazione specifica si abbia

$$S[x(\cdot)]_t^{t'} \gg \hbar \quad (2.46)$$

per cui la *fase* che compare nell'integrale di Feynman è un numero *molto grande*. Consideriamo ora due *generici* cammini  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  tali che la loro distanza  $|x_1(t) - x_2(t)|$  sia *molto piccola* su scala *classica*. Corrispondentemente anche la grandezza  $|S[x_1(\cdot)] - S[x_2(\cdot)]|$  sarà *molto piccola* se misurata

<sup>42</sup> Esiste un teorema dovuto a Berezin (F. A. Berezin, Theor. Math. Phys. **6**, 194 (1971)) che stabilisce una *corrispondenza uno-ad-uno* fra le ambiguità di quantizzazione nel formalismo operatoriale e nel formalismo di Feynman. In particolare, esso asserisce che la prescrizione del *punto medio* (come osservato nel paragrafo 2.3, essa preserva la gauge invarianza per l'azione classica (2.33)) corrisponde alla quantizzazione operatoriale con *ordinamento alla Weyl* (M. Mizrahi, J. Math. Phys. **16**, 2201 (1975). Si veda anche: T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory* (Harwood, New York, 1981)).



in unità *classiche*. Quantisticamente la situazione è radicalmente *diversa*, perché in virtù dell'eq. (2.46) abbiamo *in generale*

$$\left| S[x_1(\cdot)]_{t'}^{t''} - S[x_2(\cdot)]_{t'}^{t''} \right| \gg \hbar. \quad (2.47)$$

Di fatto, l'eq. (2.47) mostra che – nel limite classico – passando da un cammino ad uno contiguo, la fase dei loro contributi all'integrale varia in modo *molto rapido*. Ne consegue che tali contributi tendono a *cancellarsi*. Benché questo fenomeno sia generale, vi è tuttavia un'importante *eccezione*. Consideriamo nuovamente i due cammini  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , supponendo però che ora  $x_1(t)$  sia la *traiettoria dinamica classica* che congiunge  $(x', t')$  con  $(x'', t'')$ . Allora  $x_1(t)$  *estremizza*  $S[x(\cdot)]$ . Adesso è possibile avere <sup>43</sup>

$$\left| S[x_1(\cdot)]_{t'}^{t''} - S[x_2(\cdot)]_{t'}^{t''} \right| \sim \hbar. \quad (2.48)$$

Quindi le fasi dei cammini vicini a  $x_1(t)$  *differiscono di poco*, per cui i corrispondenti contributi *non* si cancellano. Concludiamo che nel limite classico *soltanto* i cammini *contigui* alla traiettoria dinamica classica che congiunge  $(x', t')$  con  $(x'', t'')$  contribuiscono *di fatto* all'integrale di Feynman: questi sono i *cammini di Feynman semiclassici* <sup>44</sup>. Quest'ultima circostanza è di notevole importanza, in quanto permette di calcolare *esplicitamente* l'integrale di Feynman nell'approssimazione semiclassica. È infatti chiaro che basta effettuare un'espansione (funzionale) alla Taylor di  $S[x(\cdot)]$  intorno a  $x_1(t)$ , arrestandosi al *secondo* ordine in  $x(t) - x_1(t)$  ( $x_1(t)$  è la traiettoria dinamica classica che congiunge  $(x', t')$  con  $(x'', t'')$  <sup>45</sup>, quindi termini del *prim*'ordine in  $x(t) - x_1(t)$  sono assenti). Un calcolo esplicito fornisce <sup>46</sup>

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle_{SC} = & \left( \frac{1}{2\pi i \hbar} \right)^{N/2} \left( \det \left| -\frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x''_j} S(x'', t''; x', t') \right| \right)^{1/2} \\ & \exp \left\{ (i/\hbar) S(x'', t''; x', t') \right\} \end{aligned} \quad (2.49)$$

<sup>43</sup> Questo perché il secondo membro dell'eq. (2.48) è nullo al prim'ordine in  $x_2(t) - x_1(t)$ .

<sup>44</sup> È naturale chiedersi quale sia la distanza dei cammini di Feynman semiclassici dalla traiettoria classica. Argomenti euristici basati sull'eq. (2.48) suggeriscono che essi siano compresi in un "tubo" di sezione  $O(\hbar^{1/2})$  intorno alla traiettoria classica. Una risposta più accurata dipende tuttavia dalla specifica situazione fisica che si considera.

<sup>45</sup> Supponiamo per semplicità che di tali traiettorie ne esista soltanto *una*.

<sup>46</sup> Si veda ad es. il testo di Schulman più volte citato.

ove  $S(x'', t''; x', t')$  è l'azione classica (2.33) (calcolata lungo  $x_1(t)$ ) come funzione delle coordinate<sup>47, 48</sup>.

Talvolta si dice che *soltanto* la traiettoria dinamica classica  $x_1(t)$  contribuisce all'integrale di Feynman nell'approssimazione semiclassica. Ciò è *falso*. Come abbiamo già visto, sono i cammini di Feynman *vicini* a  $x_1(t)$  che in realtà contribuiscono. Ma sappiamo che tali cammini godono della proprietà (2.42), quindi nell'eq. (2.49) sono presenti effetti quantistici. Di fatto, l'approssimazione semiclassica contiene i “*primi*” effetti quantistici, cioè quelli  $O(\hbar)$ <sup>49</sup>.

2.8 – Si incontra spesso l'affermazione che vi è uno stretto legame fra l'integrale di Feynman e la meccanica classica. Ciò è senz'altro vero, in quanto l'unica grandezza che compare *esplicitamente* è proprio l'*azione classica*, anche se calcolata non già lungo traiettorie classiche, bensì lungo i cammini di Feynman. Questi ultimi *non* hanno invece alcun *significato classico*, proprio perché rispecchiano gli effetti quantistici (è inoltre impossibile associare delle *probabilità* a tali cammini in modo consistente con la teoria quantistica). D'altra parte, abbiamo visto che nell'approssimazione semiclassica i cammini di Feynman si addensano intorno alla traiettoria dinamica classica che unisce  $(x', t')$  con  $(x'', t'')$ . Non solo, ma è anche stato notato che tali cammini appaiono come se il punto rappresentativo fluttuasse casualmente intorno ad una traiettoria *liscia* (cioè differenziabile). Alcune domande sorgono spontanee. Queste traiettorie lisce posseggono un significato in meccanica classica? Più in generale, esiste una *qualche connessione* fra cammini di Feynman e traiettorie dinamiche classiche? Sarebbe peraltro molto bello se un simile legame esistesse realmente, in quanto ciò evidenzerebbe una radice classica della teoria quantistica più pronunciata di quanto usualmente si pensi. Evidentemente una comprensione dell'eventuale meccanismo che genera i cammini di Feynman partendo da una traiettoria dinamica classica farebbe luce sulla natura stessa della quantizzazione.

Vedremo nel capitolo 5 che una relazione *diretta* fra cammini di Feynman e traiettorie dinamiche classiche *non* esiste. Ma ciò è unicamente dovuto al fatto che l'eq. (2.31) rappresenta un contesto *troppo ristretto* per la questione

<sup>47</sup> Questo concetto è discusso ad es. in: L. D. Landau e E. M. Lifshits, *Meccanica* (MIR, Mosca, 1976).

<sup>48</sup> In tutto il presente Quaderno ignoriamo (per semplicità) i problemi dovuti all'esistenza di *punti focali* e *caustiche* nello spazio delle configurazioni (il lettore interessato può consultare il testo di Schulman).

<sup>49</sup> Purtroppo è facile imbattersi nell'affermazione opposta, che l'approssimazione semiclassica è *puramente* classica. A sostegno di ciò viene addotto il fatto che il propagatore semiclassico (2.49) è espresso *completamente* in termini di grandezze classiche. Alla base di questa confusione sta la circostanza che le correzioni quantistiche  $O(\hbar)$  alla dinamica classica *non* dipendono da  $\hbar$ , per cui esse sono descritte soltanto da grandezze classiche, nonostante si tratti di un effetto *quantistico*! Si può trovare una chiara discussione di questo punto in: L. O'Raifeartaigh and A. Wipf, *Found. Phys.* **18**, 307 (1987).

che vogliamo affrontare. È infatti necessario *ampliare* la nostra prospettiva, rendendoci conto che esistono *infiniti* insiemi di cammini di Feynman *generalizzati*, peraltro tutti *equivalenti* dal punto di vista quantistico. Ciò risulta evidente da una riformulazione dell'integrale di Feynman che ora descriviamo (questo risultato è riportato qui per la prima volta <sup>50</sup>).

Consideriamo la formulazione di Hamilton-Jacobi della meccanica classica, nel caso della particella  $S$  descritta dall'azione (2.33). Come è ben noto, l'equazione di Hamilton-Jacobi corrispondente ha la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}S(x, t) + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right)^2 + \Phi(x, t) = 0. \quad (2.50)$$

Supponiamo ora di conoscere un (arbitrario) integrale *particolare*  $S(x, t)$  dell'eq. (2.50) <sup>51</sup>. La corrispondente traiettoria dinamica classica nello spazio delle configurazioni è data dall'equazione <sup>52, 53</sup>

$$\frac{d}{dt}q_i(t) = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i}S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \Big|_{x=q(t)}. \quad (2.51)$$

Indichiamo con  $q(t; x', t'; [S(\cdot)])$  la soluzione dell'equazione (2.51) *controllata* da  $S(x, t)$  e corrispondente alla condizione iniziale  $q(t') = x'$ . *Fisicamente*  $q(t; x', t'; [S(\cdot)])$  è la traiettoria dinamica nello spazio delle configurazioni determinata dai dati iniziali  $q(t') = x'$ ,  $p(t') = (\nabla S)(x', t')$ .

Non è difficile dimostrare <sup>54</sup> che vale la seguente rappresentazione *alternativa* del propagatore quantistico

<sup>50</sup> M. Roncadelli, *New Path Integral Representation of the Quantum Mechanical Propagator*, Pavia preprint (1991) (in corso di pubblicazione).

<sup>51</sup> Esiste un metodo alternativo (dovuto a Jacobi) per ottenere la traiettoria dinamica classica nella formulazione di Hamilton-Jacobi (vedasi ad es.: H. Goldstein, *Meccanica Classica* (Zanichelli, Bologna, 1971)). Esso ha il vantaggio di *non* coinvolgere l'eq. (2.51), ma il suo svantaggio è di richiedere la conoscenza di un integrale *completo* dell'equazione di Hamilton-Jacobi. Spesso capita di conoscere solo un integrale *particolare* dell'eq. (2.50), cosicché *soltanto* il metodo esposto nel testo può venir usato.

<sup>52</sup> Si veda ad es.: V. Arnold, *Metodi Matematici della Meccanica Classica* (Editori Riuniti, Roma, 1988).

<sup>53</sup> Si ricordi quanto osservato nella nota 48.

<sup>54</sup> Si veda la nota 50.

$$\begin{aligned}
& \langle x'', t'' | x', t' \rangle \\
&= e^{(i/\hbar)[S(x'', t'') - S(x', t')]} \int \mathcal{D}x(t) \delta(x'' - x(t'')) \delta(x' - x(t')) \\
&\times \exp \left\{ (i/\hbar)(m/2) \int_{t'}^{t''} dt \left[ \dot{x}_i(t) - \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \Big|_{x=x(t)} \right]^2 \right\} \\
& \hspace{15em} (2.52)
\end{aligned}$$

essendo  $S(x, t)$  un' *arbitraria* soluzione dell'equazione di Hamilton-Jacobi (2.50) <sup>55</sup>. Ovviamente il secondo membro dell'eq. (2.52) è (globalmente) *indipendente* dalla scelta di  $S(x, t)$ . Ora, dato che esistono *infinite* soluzioni dell'eq. (2.50), vi sono *infinite* espressioni esplicite del propagatore date dall'eq. (2.52) – in ognuna di esse contribuiscono *solo* cammini che soddisfano l'eq. (2.42), ma l'insieme di tali cammini *dipende* da  $S(x, t)$ , per cui ve ne sono *infiniti*. Siamo così giunti alla conclusione che esistono *infiniti* insiemi di cammini di Feynman *generalizzati* – quelli cioè che contribuiscono *effettivamente* nell'eq. (2.52) – ognuno *controllato* da una soluzione  $S(x, t)$  dell'equazione di Hamilton-Jacobi per il problema classico corrispondente <sup>56</sup>! Osserviamo infine che fra le eq. (2.51) e (2.52) sussiste una notevole somiglianza: ciò induce a sospettare che vi sia davvero un qualche legame fra i cammini di Feynman *generalizzati* e le traiettorie dinamiche classiche (nello spazio delle configurazioni)...

### §3. Analogie fra meccanica quantistica e processi stocastici

3.1 – Notevoli analogie *formali* sussistono fra la meccanica quantistica e la teoria dei processi stocastici classici. Queste somiglianze – scoperte fin dalle origini della teoria quantistica <sup>57</sup> – possono essere interpretate in *due*

<sup>55</sup> Coerentemente con quanto affermato nella nota 48, non dovremmo porci alcun problema riguardo ai limiti di validità dell'eq. (2.52). Ci sembra però doveroso osservare quanto segue. È noto (si veda ad es.: R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (vol. II) (Interscience, New York, 1962)) che una *generica* soluzione  $S(x, t)$  dell'equazione di Hamilton-Jacobi è regolare soltanto su un intervallo di tempo *finito*  $T$  (ciò riflette l'esistenza di *punti focali* nello spazio delle configurazioni). Di conseguenza la rappresentazione (2.52) vale solo nell'ipotesi  $|t'' - t'| < T$ . Ciò *non* è però una vera limitazione. Infatti – una volta che  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  sia stato calcolato usando l'eq. (2.52) per  $|t'' - t'| < T$  – esso può venire esteso in modo banale a tempi *arbitrari* grazie alla proprietà di convoluzione (3.4).

<sup>56</sup> L'equivalenza quantistica di insiemi diversi di cammini di Feynman *generalizzati* segue dal fatto che il secondo membro dell'eq. (2.52) *non* dipende da quale particolare soluzione  $S(x, t)$  venga scelta.

<sup>57</sup> È stato Schrödinger a discutere per primo tali analogie: E. Schrödinger, Berl. Sitzber **144** (1931); Ann. Inst. H. Poincaré **2**, 269 (1932). Si veda anche: R. Fürth, Zeit. Phys. **81**, 143 (1933). Va detto tuttavia che il punto di vista di Schrödinger è *diverso* da quello esposto nel presente Quaderno, ed è stato sviluppato recentemente in: J. C. Zambrini, Phys. Rev. A **33**, 1532 (1986).

modi *distinti*, a seconda dell'importanza che si vuole attribuire al concetto di *ampiezza* di probabilità. È infatti ben noto che in meccanica quantistica le probabilità nascono *sempre* come modulo quadrato di una certa *ampiezza*.

Se si decide di *ignorare* il gioco delle ampiezze e si fissa l'attenzione sulle distribuzioni di *probabilità*, alcune analogie strutturali suggeriscono di interpretare la teoria quantistica come un particolare modello di processo stocastico classico <sup>58</sup>. Effettivamente, è possibile riformulare la meccanica quantistica in termini di concetti probabilistici classici – ciò è stato fatto originariamente da Fényes <sup>59</sup> nel 1952 e successivamente, in modo più completo e rigoroso, da Nelson <sup>60</sup> nel 1966. Però, dato che questo approccio *non* è di *diretta* rilevanza per l'integrale di Feynman, preferiamo rimandare il lettore interessato alla bibliografia.

A differenza dell'atteggiamento precedente – che di fatto “forza” una fisica *non* classica entro un formalismo classico – si possono considerare le *ampiezze* come *grandezze fondamentali*. Risulta allora che la struttura concettuale della meccanica quantistica è *molto simile* – anche se *non* identica – a quella della teoria dei processi stocastici markoviani <sup>61</sup> classici. Come si vedrà leggendo l'articolo di Feynman, è proprio questo secondo punto di vista che gli è stato di guida nel formulare la dinamica quantistica come “*somma sui cammini*”.

Quanto appena osservato può venire schematizzato dicendo che le *ampiezze* di probabilità *quantistiche* soddisfano regole formali quasi <sup>62</sup> *identiche* a quelle che valgono per le *probabilità* relative ad un processo stocastico markoviano *classico* <sup>63</sup>. Al fine di sottolineare questo fatto fondamentale scriviamo simbolicamente

$$\begin{array}{c} \text{PROBABILITÀ} \\ \text{CLASSICHE} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{AMPIEZZE} \\ \text{QUANTISTICHE,} \end{array} \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{c} \text{CALCOLO CLASSICO} \\ \text{DELLE PROBABILITÀ} \end{array} \simeq \begin{array}{c} \text{CALCOLO QUANTISTICO} \\ \text{DELLE AMPIEZZE.} \end{array} \quad (3.2)$$

---

<sup>58</sup> Questo modello è però *radicalmente diverso* da quelli usati nelle applicazioni fisiche ordinarie, come ad es. in connessione con il moto browniano macroscopico. Inoltre, quando si considerano correlazioni a tempi *diversi*, è necessario introdurre il concetto di “*collasso della funzione d'onda*”. Si veda: Ph. Blanchard, S. Golin and M. Serva, Phys. Rev. D **34**, 3732 (1986).

<sup>59</sup> I. Fényes, Zeit. Phys. **132**, 81 (1952).

<sup>60</sup> E. Nelson, Phys. Rev. **150**, 1079 (1966).

<sup>61</sup> Questi processi verranno considerati nel paragrafo 3.3.

<sup>62</sup> L'unica differenza sta nella condizione di normalizzazione.

<sup>63</sup> Naturalmente le ampiezze quantistiche sono quantità *complesse*, mentre le probabilità sono grandezze *reali e non negative*.

Passiamo ora ad illustrare in dettaglio queste affermazioni.

3.2 – È ben noto che in meccanica quantistica l'evoluzione temporale è descritta *completamente* da *due* grandezze <sup>64</sup>:

- i) *funzione d'onda iniziale*  $\psi(x, t_0)$ ;
- ii) *ampiezza di transizione (propagatore)*  $\langle x, t | x_0, t_0 \rangle$ .

Sappiamo infatti che la funzione d'onda ad un qualunque tempo  $t$  è data dalla relazione

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x, t | x_0, t_0 \rangle \psi(x_0, t_0). \quad (3.3)$$

Inoltre il propagatore soddisfa la cosiddetta *proprietà di semigrupp*

$$\langle x, t | x', t' \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \langle x, t | x_0, t_0 \rangle \langle x_0, t_0 | x', t' \rangle \quad (3.4)$$

che si ottiene immediatamente facendo uso della relazione di completezza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 |x_0, t_0\rangle \langle x_0, t_0| = 1. \quad (3.5)$$

Abbiamo già ricordato che in meccanica quantistica le probabilità appaiono sempre come il modulo quadrato di una ampiezza, pertanto la *densità di probabilità*  $P_q(x, t)$  e la *probabilità di transizione*  $P_q(x, t | x', t')$  *quantistiche* sono definite come

$$P_q(x, t) \equiv |\psi(x, t)|^2, \quad (3.6)$$

$$P_q(x, t | x', t') \equiv |\langle x, t | x', t' \rangle|^2. \quad (3.7)$$

A questo punto è immediato verificare che le eq. (3.3) e (3.4) implicano

---

<sup>64</sup> Una tale schematizzazione è molto conveniente perché la funzione d'onda iniziale specifica il particolare stato del sistema *indipendentemente* dai campi di forza presenti, mentre il propagatore contiene l'informazione sull'effettiva dinamica che si considera, *indipendentemente* dallo stato iniziale.

$$P_q(x, t)^{1/2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P_q(x, t|x_0, t_0)^{1/2} P_q(x_0, t_0)^{1/2}, \quad (3.8)$$

$$P_q(x, t|x', t')^{1/2} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P_q(x, t|x_0, t_0)^{1/2} P_q(x_0, t_0|x', t')^{1/2}. \quad (3.9)$$

È molto importante tenere presente che le eq. (3.3), (3.4) – e quindi anche le (3.8) e (3.9) – valgono *solo* sotto un'implicita assunzione: *non viene effettuata alcuna misurazione*. Se invece una misurazione venisse eseguita al tempo  $t_0$ , le eq. (3.8) e (3.9) verrebbero sostituite dalle seguenti <sup>65</sup>

$$P_q(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P_q(x, t|x_0, t_0) P_q(x_0, t_0), \quad (3.10)$$

$$P_q(x, t|x', t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P_q(x, t|x_0, t_0) P_q(x_0, t_0|x', t'). \quad (3.11)$$

**3.3** – Consideriamo ora un *processo stocastico classico*, che è essenzialmente una *variabile aleatoria dipendente dal tempo*  $\xi(t)$  <sup>66</sup>. Secondo Kolmogorov, una descrizione *completa* (in senso probabilistico) di tale processo può essere ottenuta discretizzando il tempo in un numero arbitrario di istanti  $t_i$  ( $t_1 < t_2 < \dots$ ) e specificando le *densità di probabilità congiunte*  $P_n(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1)$  <sup>67</sup>. Queste grandezze sono definite in modo tale che si abbia (con ovvio significato dei simboli)

---

<sup>65</sup> Questo punto è discusso in dettaglio nell'articolo tradotto.

<sup>66</sup> Si vedano al proposito i testi citati nella bibliografia. Ci limitiamo qui a ricordare che una *variabile aleatoria* è specificata dall'*insieme dei suoi possibili valori* (spazio campione) e da una *distribuzione di probabilità* definita sullo spazio campione; essa deve essere una funzione reale non negativa e normalizzata. Sottolineiamo che la visualizzazione di una distribuzione di probabilità mediante un'*ensemble* è una pratica comune in fisica, benché *non* sia affatto necessaria in linea di principio.

<sup>67</sup> Nel seguito ometteremo per semplicità l'attributo *densità*. Invitiamo però il lettore a tener *sempre* presente che ogniqualvolta parleremo di “*probabilità*” intenderemo *sempre* “*densità di probabilità*” (si ricordi quanto osservato nella nota 7).

$$\text{prob} \{x_n < \xi(t_n) < x_n + dx_n; \dots; x_1 < \xi(t_1) < x_1 + dx_1\} \equiv P_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) dx_n \dots dx_1. \quad (3.12)$$

In linea di principio è necessario conoscere tutte le  $P_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$  (per  $n$  arbitrario) al fine di avere una caratterizzazione completa del processo. È inoltre chiaro che le  $P_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$  devono soddisfare le seguenti condizioni (*assiomi di Kolmogorov*)<sup>68</sup>:

- i)  $P_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) \geq 0, \forall n$ ;
- ii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n P_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = P_{n-1}(x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1)$ ;
- iii)  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x, t) = 1$ .

Un concetto molto importante è quello di *densità di probabilità condizionata*. Supponiamo ad esempio che i valori assunti dal processo  $\xi(t)$  ai tempi  $t_1, \dots, t_m$ , ( $t_1 < \dots < t_m$ ) siano noti con *certezza*. Siamo allora portati a considerare la seguente probabilità

$$\begin{aligned} \text{prob} \{x_n < \xi(t_n) < x_n + dx_n; \dots; x_{m+1} < \xi(t_{m+1}) < x_{m+1} + dx_{m+1} | \\ \xi(t_m) = x_m; \dots; \xi(t_1) = x_1\} \equiv \\ P(x_n, t_n; \dots; x_{m+1}, t_{m+1} | x_m, t_m; \dots; x_1, t_1) dx_n \dots dx_{m+1}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La quantità  $P(x_n, t_n; \dots; x_{m+1}, t_{m+1} | x_m, t_m; \dots; x_1, t_1)$  ( $t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} < \dots < t_n$ ) definita in tal modo è detta appunto densità di probabilità condizionata<sup>69</sup>. È molto facile convincersi che fra le densità di probabilità condizionate e congiunte sussiste la relazione<sup>70</sup>

$$P_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n; \dots; x_{m+1}, t_{m+1} | x_m, t_m; \dots; x_1, t_1) \cdot P_m(x_m, t_m; \dots; x_1, t_1). \quad (3.14)$$

<sup>68</sup> Alcuni autori includono l'ulteriore condizione:  $P_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$  non cambia scambiando fra loro due qualsiasi coppie  $(x_i, t_i), (x_j, t_j)$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ). Essa è però notevolmente restrittiva, in quanto formalizza il concetto di *invarianza sotto inversione temporale (reversibilità)* per un processo stocastico. Si veda ad es.: M. Kac and J. Logan, *Fluctuations*, in *Studies in Statistical Mechanics*, vol. VII, ed. by E. W. Montrol and J. L. Lebovitz (North-Holland, Amsterdam, 1979). Si noti che – in virtù dell'eq. (1.14) –  $P_q(x, t | x', t')$  definita dall'eq. (3.7) soddisfa quest'ultima condizione, in accordo col fatto che l'evoluzione quantistica è temporalmente *reversibile*.

<sup>69</sup> Si assume cioè la condizione che si abbia con certezza  $\xi(t_1) = x_1, \dots, \xi(t_m) = x_m$ .

<sup>70</sup> Essa è nota come *regola di Bayes*.



Una classe particolarmente importante di processi stocastici è quella dei *processi di Markov*, caratterizzati dal fatto che la generica probabilità condizionata  $P(x_n, t_n; \dots; x_{m+1}, t_{m+1} | x_m, t_m; \dots; x_1, t_1)$  è *indipendente* dalle variabili  $x_1, t_1; \dots; x_{m-1}, t_{m-1}$ , mentre *dipende* da  $x_m, t_m$ <sup>71</sup>. Possiamo dire in modo più intuitivo che secondo la proprietà di Markov “il futuro dipende dal passato *solo* attraverso il presente”, cioè il presente determina *completamente* il futuro, *indipendentemente* da quanto è avvenuto nel passato. È facile rendersi conto che per un processo markoviano l’infinita gerarchia delle densità di probabilità congiunte  $P_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$  è *completamente* determinata da *due* sole grandezze:

- i) *densità di probabilità iniziale*  $P(x, t_0)$ ;
- ii) *probabilità di transizione*  $P(x, t | x_0, t_0)$ , ( $t_0 \leq t$ ).

Esse sono connesse dalla relazione

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P(x, t | x_0, t_0) P(x_0, t_0). \quad (3.15)$$

Infatti abbiamo

$$P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P_2(x, t; x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P(x, t | x_0, t_0) P(x_0, t_0). \quad (3.16)$$

Si può ulteriormente mostrare che la proprietà di Markov implica la cosiddetta *equazione di Chapman-Kolmogorov*<sup>72</sup>

$$P(x, t | x', t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 P(x, t | x_0, t_0) P(x_0, t_0 | x', t'), \quad (3.17)$$

in cui si suppone  $t' \leq t_0 \leq t$ . Nel seguito, useremo l’abbreviazione PSMC (*processo stocastico markoviano classico*).

**3.4** – È ora chiaro che esiste un’analogia molto stretta fra le eq. (3.3), (3.4) da un lato, e le eq. (3.15), (3.17) dall’altro – si può infatti passare da

<sup>71</sup> Se essa non dipendesse neppure da  $x_m, t_m$  si avrebbe un *processo di Bernoulli*.

<sup>72</sup> Si veda un qualunque testo di processi stocastici citato nella bibliografia.

queste a quelle mediante la sostituzione (3.1), che assume pertanto la forma più specifica

$$P(x, t) \longleftrightarrow \psi(x, t), \quad (3.18)$$

$$P(x, t|x', t') \longleftrightarrow \langle x, t|x', t' \rangle. \quad (3.19)$$

Ma c'è di più! Se *non si effettua* alcuna misurazione, le probabilità quantistiche soddisfano le eq. (3.8), (3.9) che *differiscono* dalle formule classiche (3.15), (3.17): il manifestarsi di tale comportamento *non classico* sta alla base del famoso “*aspetto ondulatorio della materia*”. Se invece *si effettua* una misurazione al tempo  $t_0$ , le probabilità quantistiche ubbidiscono alle eq. (3.10), (3.11), che manifestamente *coincidono* con le corrispondenti formule classiche (3.15), (3.17): in questo secondo caso la materia si comporta come ci si attenderebbe in fisica classica, vale a dire “*in modo corpuscolare*”. L'analisi dell'esperimento di diffrazione da doppia fenditura data da Feynman nell'articolo tradotto illustra questi concetti in modo estremamente chiaro <sup>73</sup>.

Notiamo a questo punto che l'analogia schematizzata dalle eq. (3.1), (3.2) è *affatto generale*, in quanto *non* è stata fatta alcuna ipotesi sulla forma *esplicita* dell'hamiltoniana.

**3.5 – Ulteriore conseguenza** delle eq. (3.1) e (3.2) è che si deve avere una *somiglianza formale* fra le varie descrizioni di un PSMC e le possibili formulazioni della meccanica quantistica <sup>74</sup>. Se questo fatto fondamentale fosse stato apprezzato appieno fin dai primi tempi della teoria quantistica, la scoperta dell'integrale di Feynman sarebbe potuta avvenire vent'anni prima (questo punto verrà discusso nel paragrafo 3.10)! Cosa ancor più sorprendente, una *nuova* formulazione della meccanica quantistica emerge spontaneamente – proprio in virtù delle eq. (3.1) e (3.2) – dalla descrizione di Langevin di un PSMC (questo argomento sarà trattato nel capitolo 5).

**3.6 – Considereremo** (d'ora in poi) un generico PSMC nello *spazio delle configurazioni* (tridimensionale) <sup>75</sup>. Esso è caratterizzato dalla *costante*

<sup>73</sup> È importante osservare che il punto di vista qui adottato suggerisce in modo *naturale* di interpretare la meccanica quantistica come una *teoria nonclassica delle probabilità*. Si vede quindi in modo esplicito che anche le probabilità – come già la geometria con Riemann ed Einstein – non sono verità *a priori*, ma *dipendono* dalla specifica *situazione fisica* che si considera. Corrispondentemente il famoso dualismo onda-particella appare “sbilanciato”: ad es. un elettrone è *sempre* una particella, mentre l'aspetto ondulatorio è una semplice conseguenza del fatto che le probabilità *non* soddisfano il calcolo *classico*.

<sup>74</sup> Naturalmente ciò *non* significa che non possano esistere formulazioni della teoria quantistica *senza* un analogo per i processi stocastici classici.

<sup>75</sup> L'esempio fisico più noto di questo tipo di processi stocastici è il moto browniano macroscopico nell'*approssimazione di Einstein-Smoluchowski*, che corrisponde al caso di *grande attrito*. Si veda a tale proposito ad es.: N. G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1981).

di diffusione  $D$  che descrive l'effetto delle *fluttuazioni*, mentre la “drift”  $V(x, t)$  descrive gli effetti *deterministici* di campi di forza eventualmente presenti. Supponiamo inoltre che le particelle che realizzano il processo possano venir *emesse* e *assorbite* dall'ambiente: ciò è specificato dalla “killing rate”  $\Delta(x, t)$ , che esprime la *probabilità di assorbimento per unità di tempo* <sup>76</sup>.

È fondamentale notare che gli effetti rappresentati da  $D$ ,  $V(x, t)$  e  $\Delta(x, t)$  *non* interferiscono fra loro, per cui ne possiamo tenere conto in modo *additivo*. Possiamo cioè analizzare il PSMC in questione supponendo ad es. dapprima  $D \neq 0$ ,  $V(x, t) = 0$  e  $\Delta(x, t) = 0$ , poi  $D = 0$ ,  $V(x, t) \neq 0$  e  $\Delta(x, t) = 0$  ed infine  $D = 0$ ,  $V(x, t) = 0$  e  $\Delta(x, t) \neq 0$ . La “sovrapposizione” di queste tre situazioni fisiche fornisce allora la rappresentazione del PSMC originario.

3.7 – La descrizione “standard” di un PSMC è basata sull'equazione differenziale lineare di Fokker-Planck <sup>77</sup> per la densità di probabilità  $P(x, t)$ . Si noti che la probabilità di transizione  $P(x, t|x_0, t_0)$  non è altro che il *propagatore* di tale equazione, in virtù dell'eq. (3.15).

Nel caso considerato, l'equazione di Fokker-Planck assume la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x, t) - \frac{\partial}{\partial x_i}[V_i(x, t)P(x, t)] - \Delta(x, t)P(x, t). \quad (3.20)$$

*Concettualmente*, il ruolo di questa equazione è chiarito dal fatto che  $D$ ,  $P(x, t)$  e  $\Delta(x, t)$  possono venir definite in termini di  $P(x, t|x_0, t_0)$  <sup>78</sup>. Allora l'equazione di Fokker-Planck appare come un'espressione *differenziale* (approssimata) dell'equazione di Chapman-Kolmogorov (3.17).

Discutiamo ora il *significato fisico* dell'eq. (3.20).

Sfruttando l'osservazione fatta nel paragrafo 3.6, cominciamo col considerare il caso limite in cui le fluttuazioni abbiano un ruolo trascurabile – ciò consente di porre  $D = 0$  (almeno in prima approssimazione). È anche conveniente supporre momentaneamente che non si abbia emissione o assorbimento di particelle da parte dell'ambiente, per cui poniamo  $\Delta(x, t) = 0$ . Corrispondentemente l'eq. (3.20) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i}[V_i(x, t)P(x, t)]. \quad (3.21)$$

<sup>76</sup> Ci sembra abbastanza strano che effetti di quest'ultimo tipo vengano spesso ignorati nella letteratura. Un'eccezione è: F. W. Wiegel, *Introduction to Path Integral Methods in Physics and Polymer Science* (World Scientific, Singapore, 1986). Come risulterà evidente, è invece molto conveniente considerare questi effetti discutendo le analogie formali con la meccanica quantistica.

<sup>77</sup> A. D. Fokker, Ann. Phys. **43**, 810 (1914); M. Planck, Sitzber. Preuss. Akad. Wissens. 324 (1917).

<sup>78</sup> Per una trattazione molto chiara di questo punto si veda: C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, 1983).

Questo risultato è in perfetto accordo con l'intuizione fisica: dato che il numero di particelle è costante, le probabilità si conservano, per cui la densità di probabilità deve soddisfare un'equazione di continuità. Ora, all'eq. (3.21) è associata l'equazione

$$\frac{d}{dt}q_i(t) = V_i(q(t), t). \quad (3.22)$$

Poiché di fatto l'eq. (3.22) segue dall'eq. (3.21) ponendo

$$P(x, t) = \delta(x - q(t)) \quad (3.23)$$

è evidente che entrambe descrivono la *stessa* evoluzione temporale dovuta agli effetti deterministici <sup>79</sup> (i soli ora presenti!). Arriviamo così alla conclusione che le soluzioni  $q(t)$  dell'eq. (3.22) descrivono le *traiettorie fisiche* del PSMC considerato *nell'approssimazione*  $D = 0$ ,  $V(x, t) \neq 0$  e  $\Delta(x, t) = 0$ .

Se *non* avessimo supposto la costanza del numero delle particelle, al posto dell'eq. (3.21) avremmo ottenuto dall'eq. (3.20)

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i}[V_i(x, t)P(x, t)] - \Delta(x, t)P(x, t). \quad (3.24)$$

Vediamo quindi che il termine aggiuntivo nell'eq. (3.24) tiene conto proprio del fatto che le probabilità in realtà non si conservano, a causa dei processi di emissione e di assorbimento (si noti che ciò è in accordo con l'interpretazione di  $\Delta(x, t)$  come probabilità di assorbimento per unità di tempo). Naturalmente le *traiettorie fisiche* restano le *stesse* di prima – cambia *solo* la distribuzione di probabilità: si può infatti dimostrare che ora l'eq. (3.22) segue dall'eq. (3.24) ponendo

$$P(x, t) = \delta(x - q(t)) \exp \left\{ - \int_{t_0}^t dt' \Delta(q(t'), t') \right\}. \quad (3.25)$$

Abbiamo così chiarito il significato del secondo e terzo termine nel secondo membro dell'eq. (3.20).

---

<sup>79</sup> Non c'è da stupirsi che un'evoluzione temporale deterministica sia descritta da una distribuzione di probabilità: ciò significa semplicemente che lo stato iniziale *non* è noto esattamente.

Qual'è il significato del primo termine? Consideriamo adesso il caso limite opposto, in cui le fluttuazioni abbiano un ruolo predominante – supporremo pertanto  $D \neq 0$ ,  $V(x, t) = 0$  e  $\Delta(x, t) = 0$ . Quindi l'eq. (3.20) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t). \quad (3.26)$$

Questa è la ben nota “equazione del calore”, che descrive un *processo di Wiener*, cioè un PSMC definito dalla seguente probabilità di transizione

$$P(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t-t_0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{4D} \frac{(x-x_0)^2}{(t-t_0)} \right\}. \quad (3.27)$$

È dunque evidente che le fluttuazioni associate al processo stocastico descritto dall'eq. (3.20) sono caratterizzate da una distribuzione *gaussiana* di probabilità<sup>80, 81</sup>.

C'è un punto che va ulteriormente chiarito. È naturale aspettarsi che *anche* nel caso  $D \neq 0$ ,  $V(x, t) \neq 0$  e  $\Delta(x, t) = 0$  la densità di probabilità debba soddisfare un'equazione di continuità, dato che il numero di particelle è costante. Ma ora l'eq. (3.20) si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) - \frac{\partial}{\partial x_i} [V_i(x, t) P(x, t)] \quad (3.28)$$

che non sembra avere la forma di un'equazione di continuità. È senz'altro vero che l'eq. (3.28) differisce dall'eq. (3.21), però va tenuto presente che adesso la situazione è più complessa, perché si sta tenendo conto anche dell'effetto delle fluttuazioni. Procedendo formalmente, notiamo che l'eq. (3.28) può venire riscritta come

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left[ -D \frac{\partial}{\partial x_i} P(x, t) + V_i(x, t) P(x, t) \right] \quad (3.29)$$

per cui, ponendo

---

<sup>80</sup> È importante apprezzare il fatto che la distribuzione di probabilità relativa a tali fluttuazioni è *indipendente* dallo stato dinamico del sistema considerato. È per questo motivo che parleremo di “*fluttuazioni di fondo*”. Questo aspetto verrà sviluppato nel capitolo 5.

<sup>81</sup> È ben noto che le distribuzioni *gaussiane* di probabilità hanno un ruolo preminente in fisica. Ciò è dovuto essenzialmente al *teorema centrale del limite* (si veda ad es.: A. Papoulis, *Probabilità, Variabili Aleatorie e Processi Stocastici* (Boringhieri, Torino, 1973)).

$$U_i(x, t) \equiv -D \frac{\partial}{\partial x_i} \ln P(x, t), \quad (3.30)$$

$$W_i(x, t) \equiv U_i(x, t) + V_i(x, t) \quad (3.31)$$

l'eq. (3.29) diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x_i} [W_i(x, t) P(x, t)] \quad (3.32)$$

che ha la forma usuale di un'equazione di continuità! Pertanto l'equazione di Fokker-Planck (3.28) può effettivamente essere vista come un'equazione di continuità, in cui compare la *velocità di corrente*  $W(x, t)$ . Fisicamente non vi è proprio nulla di misterioso in quanto abbiamo fatto: la velocità con cui si muove una particella ha un contributo dovuto agli effetti deterministici (come nel caso dell'eq. (3.21)) *più* un contributo dovuto all'*effetto medio* delle fluttuazioni. Quest'ultimo è la cosiddetta *velocità osmotica*, definita dall'eq. (3.30)<sup>82</sup>. Si noti che la validità dell'eq. (3.31) è conseguenza diretta della non interferenza fra i due tipi di effetti.

Ci preme sottolineare due aspetti caratteristici della descrizione di un PSMC basata sull'equazione di Fokker-Planck. Si tiene conto delle fluttuazioni in modo *indiretto*, considerando solamente il loro *effetto medio* su  $P(x, t)$  e  $P(x, t|x_0, t_0)$ . Ulteriormente tale approccio *non* fa alcuna affermazione sulle *traiettorie fisiche* di un PSMC. Notiamo infine che quest'ultimo può venire schematizzato come un'*evoluzione temporale deterministica* – dettata dall'eq. (3.22) – *perturbata da fluttuazioni gaussiane di fondo* (eventualmente le particelle possono essere emesse o assorbite dall'ambiente).

**3.8** – Da quanto abbiamo visto è chiaro che la formulazione della meccanica quantistica basata sull'equazione di Schrödinger è concettualmente sullo *stesso piano* della descrizione di un PSMC basata sull'equazione di Fokker-Planck. Scriviamo quindi simbolicamente

$$\begin{array}{ccc} \text{FORMULAZIONE} & & \text{FORMULAZIONE} \\ \text{DI FOKKER - PLANCK} & \longleftrightarrow & \text{DI SCHRÖDINGER.} \\ & & (3.33) \end{array}$$

---

<sup>82</sup> È proprio la velocità osmotica l'elemento caratteristico di un *processo di diffusione*, che poi non è altro che un PSMC con traiettorie fisiche continue. Dall'eq. (3.30) segue che la *corrente osmotica* è  $J(x, t) = -D \nabla P(x, t)$ . Dato che nella trattazione fenomenologica di un processo diffusivo macroscopico  $P(x, t)$  è proporzionale alla concentrazione delle particelle considerate, si ritrova un risultato ben noto di fisica elementare.

Vi è tuttavia qualcosa che va *al di là* delle semplice corrispondenza schematizzata dall'eq. (3.33). Infatti – come il lettore avrà certamente notato – anche la *forma esplicita* dell'eq. (3.20) è molto simile a quella tipica dell'equazione di Schrödinger. Vogliamo studiare in dettaglio questo aspetto.

Consideriamo ancora la particella  $\mathcal{S}$  descritta classicamente dall'azione (2.33). Come è ben noto, l'equazione di Schrödinger corrispondente è

$$\begin{aligned} i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) &= \frac{1}{2m} \left( -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - \Omega_i(x, t) \right) \cdot \\ &\left( -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - \Omega_i(x, t) \right) \psi(x, t) + \Phi(x, t) \psi(x, t). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ponendo per convenienza formale

$$\epsilon \equiv \frac{i \hbar}{2m}, \quad (3.35)$$

$$\Theta_i(x, t) \equiv -\frac{1}{m} \Omega_i(x, t), \quad (3.36)$$

$$\mathcal{D}(x, t) \equiv \frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial x_i} \Omega_i(x, t) + \frac{i}{\hbar} \left( \frac{1}{2m} \Omega_i(x, t) \Omega_i(x, t) + \Phi(x, t) \right), \quad (3.37)$$

l'eq. (3.34) può essere riscritta come

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \Theta_i(x, t) \psi(x, t) \right] - \mathcal{D}(x, t) \psi(x, t). \quad (3.38)$$

Nella forma (3.38) l'equazione di Schrödinger considerata è *strutturalmente identica* all'equazione di Fokker-Planck (3.20). Vediamo quindi che – in virtù della corrispondenza (3.18) – l'una si trasforma nell'altra, a patto di assumere l'ulteriore corrispondenza

$$D \longleftrightarrow \epsilon, \quad (3.39)$$

$$V(x, t) \longleftrightarrow \Theta(x, t), \quad (3.40)$$

$$\Delta(x, t) \longleftrightarrow \mathcal{D}(x, t). \quad (3.41)$$

Siamo così giunti a stabilire una *completa corrispondenza* fra la dinamica quantistica di  $\mathcal{S}$  ed un generico PSMC.

3.9 – Una descrizione alternativa di un PSMC è stata iniziata da Wiener<sup>83</sup> e sviluppata successivamente da Kac<sup>84</sup> ed Onsager e Machlup<sup>85</sup>. Sostanzialmente, questo approccio fornisce la probabilità di transizione  $P(x'', t'' | x', t')$  come *integrale funzionale* (*integrale di Wiener*<sup>86</sup>), permettendo così di calcolare tale grandezza *senza* che sia necessario risolvere l'equazione di Fokker-Planck. La presentazione che segue metterà in evidenza la profonda *analogia strutturale* fra gli integrali di Wiener e di Feynman<sup>87</sup>.

Denotiamo con  $\Sigma$  una particella che “materializza” un generico PSMC e consideriamo l'evento  $B$  “ $\Sigma$  va da  $(x', t')$  a  $(x'', t'')$ ”. È evidente che la *probabilità* (totale)  $P(x'', t'' | x', t')$  associata a questo evento non è altro che la probabilità di transizione relativa al PSMC in questione. Indichiamo anche in questo caso con  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$  lo spazio dei *cammini*, cioè delle funzioni (reali) continue  $x(t)$  con estremi fissi  $x(t') \equiv x'$ ,  $x(t'') \equiv x''$ . Di fatto, il primo postulato di Wiener è

W1) Tutte le *alternative disgiunte*<sup>88</sup> secondo le quali l'evento  $B$  può realizzarsi sono descritte da *cammini*  $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ .

Prima di Wiener, le più generali distribuzioni di probabilità erano le probabilità congiunte  $P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$  che si riferiscono ad un insieme *discreto* di punti. Egli ha esteso tale concetto al caso di un insieme *continuo*, postulando così l'esistenza della seguente *probabilità di transizione* associata ad un *intero cammino*  $x(t) \in \mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$

$$P(x'', t'' | x', t')[x(\cdot)] \equiv \left( \begin{array}{l} \text{probabilità che } \Sigma \\ \text{si muova lungo } x(t) \end{array} \right). \quad (3.42)$$

Questa grandezza può anche venir interpretata come *probabilità per il particolare cammino*  $x(t)$ : in tal modo una distribuzione di *probabilità* risulta

<sup>83</sup> N. Wiener, J. Math. and Phys. **2**, 132 (1923); Proc. London Math. Soc. **22**, 454 (1924) e **55**, 117 (1930).

<sup>84</sup> M. Kac, in *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, (University of California Press, Berkeley, 1951). Si veda anche: M. Kac, *Probability and Related Topics in Physical Sciences* (Interscience, London, 1959).

<sup>85</sup> L. Onsager and S. Machlup, Phys. Rev. **91**, 1505 (1953); S. Machlup and L. Onsager, Phys. Rev. **91**, 1512 (1953).

<sup>86</sup> In realtà, Wiener ha considerato soltanto il caso in cui  $V(x, t) = 0$  e  $\Delta(x, t) = 0$ . Tuttavia per “*integrale di Wiener*” intenderemo nel presente Quaderno la *generalizzazione* dell'integrale di Wiener originale in cui si abbia  $V(x, t) \neq 0$  e  $\Delta(x, t) \neq 0$ . Si veda: I. M. Gel'fand and A. M. Yaglom, J. Math. Phys. **1**, 48 (1960); R. Graham, Zeit. Phys. **B26**, 290 (1977).

<sup>87</sup> I ragionamenti che seguono sono *diversi* da quelli che hanno condotto Wiener alla formulazione del suo integrale. Si veda la nota 104.

<sup>88</sup> Vale anche qui quanto osservato nella nota 28.



definita su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ <sup>89</sup>. Ancora,  $P(x'', t''|x', t')$  ha la struttura

$$P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)] \equiv \delta(x'' - x(t''))\delta(x' - x(t'))P[x(\cdot)] \quad (3.43)$$

in cui le due funzioni delta di Dirac implicano che tale probabilità si annulli – come deve essere – se  $x(t') \neq x'$  e/o  $x(t'') \neq x''$ . Nell'eq. (3.43)  $P[x(\cdot)]$  è un funzionale continuo determinato dal secondo postulato

W2) La *probabilità di transizione* lungo  $x(t)$  è

$$P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)] = \delta(x'' - x(t''))\delta(x' - x(t')) \cdot \exp \left\{ -\tilde{S}[x(\cdot)]_{t'}^{t''} \right\} \quad (3.44)$$

ove  $\tilde{S}[x(\cdot)]_{t'}^{t''}$  ha la stessa forma di un'azione classica

$$\tilde{S}[x(\cdot)]_{t'}^{t''} = \int_{t'}^{t''} dt \tilde{L}(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (3.45)$$

in cui la “*lagrangiana di Wiener*”  $\tilde{L}(x, \dot{x}, t)$  è determinata completamente dalle tre grandezze che definiscono il processo  $D$ ,  $V(x, t)$  e  $\Delta(x, t)$ . Esplicitamente

$$\tilde{L} = \frac{1}{4D} (\dot{x}_i - V_i(x, t))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(x, t) + \Delta(x, t). \quad (3.46)$$

Ora, secondo il *calcolo classico delle probabilità*<sup>90</sup>, la probabilità (totale) di un evento è la *somma* delle probabilità relative ad ogni singola alternativa disgiunta secondo cui esso può realizzarsi. Conseguentemente – in virtù del postulato W1 –  $P(x'', t''|x', t')$  risulta essere la *somma* di  $P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)]$  su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ <sup>91</sup>. Pertanto il terzo postulato di Wiener è

W3) La *probabilità di transizione* è data da

$$P(x'', t''|x', t') = \int \mathcal{D}x(t) P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)]. \quad (3.47)$$

Concludiamo che l'integrale di Wiener per un generico PSMC ha la forma

<sup>89</sup> Si ricordi la nota 31

<sup>90</sup> Si veda, ad es.: B. V. Gnedenko, *Teoria delle Probabilità* (Editori Riuniti, Roma, 1987).

<sup>91</sup> Come promesso, abbiamo ora una *giustificazione* dell'eq. (2.41).

$$P(x'', t'' | x', t') = \int \mathcal{D}x(t) \delta(x'' - x(t'')) \delta(x' - x(t')) \exp \left\{ -\tilde{S}[x(\cdot)]_{t'}^{t''} \right\} \quad (3.48)$$

ove  $\tilde{S}[x(\cdot)]$  è data dalle eq. (3.45) e (3.46).

A questo punto la *somiglianza* fra gli integrali di Wiener e di Feynman è evidente, ed essa verrà considerata più in dettaglio nel prossimo paragrafo. Osserviamo che al primo si applicano molte delle considerazioni fatte a proposito del secondo. L'eq. (3.48) va intesa come limite di un'espressione discretizzata – proprio come nel caso dell'eq. (2.31) (la discussione fatta nel paragrafo 2.3 può essere ripetuta qui quasi alla lettera) – ed è importante sottolineare che in tale discretizzazione  $V(x, t)$  va calcolato nel *punto medio*  $\bar{x}_j \equiv (x_j + x_{j+1})/2$ <sup>92</sup>. Ancora, i *cammini di Wiener* – cioè quei cammini che contribuiscono *effettivamente* nell'eq. (3.48) – godono della proprietà

$$\Delta x(t) \sim (\Delta t)^{1/2} \quad (3.49)$$

per cui sono *frattali* con dimensione di Hausdorff uguale a *due*<sup>93,94,95</sup>. Abbiamo visto che la proprietà (3.49) per i cammini di Feynman è equivalente al principio di indeterminazione. Esiste forse un principio di indeterminazione

<sup>92</sup> Qui la situazione è *formalmente identica* a quanto avviene per l'integrale di Feynman con azione classica (2.33) (si ricordi quanto è stato detto al proposito nel paragrafo 2.6), e  $\tilde{S}[x(\cdot)]$  non è più un integrale di Riemann. L'unica differenza è che nel presente contesto si può attribuire un significato matematicamente *rigoroso* a  $\tilde{S}[x(\cdot)]$  interpretandolo come *integrale stocastico*. Questi integrali sono ancora definiti come limite di somme di Cauchy-Riemann, però *dipendono* dalla particolare discretizzazione che è stata scelta (nel caso in questione ciò è conseguenza dell'eq. (3.49)). Anche se esistono *a priori* infiniti modi di scegliere una discretizzazione, ve ne sono solamente due che hanno un reale interesse. Una scelta consiste nel calcolare il valore dell'integrando nei *punti iniziali* degli intervalli infinitesimi e definisce l'*integrale di Itô* (esso soddisfa regole *diverse* da quelle dell'usuale calcolo integrale). L'altra scelta corrisponde ai *punti medi* degli intervalli infinitesimi (in cui è calcolato il valore dell'integrando) e dà luogo all'*integrale di Stratonovich* (per il quale valgono le *stesse* regole dell'ordinario calcolo integrale). Quindi la nostra scelta è di interpretare  $\tilde{S}[x(\cdot)]$  nell'eq. (3.48) come *integrale di Stratonovich*. Osserviamo che, se invece preferissimo la scelta "alla Itô", dovremmo omettere il secondo termine nella lagrangiana di Wiener (3.46) al fine di ottenere lo *stesso* risultato. Gli integrali stocastici sono discussi in tutti i testi avanzati di teoria dei processi stocastici. Si veda ad es.: H. P. McKean, *Stochastic Integrals* (Academic Press, New York, 1969).

<sup>93</sup> Si veda la nota 37.

<sup>94</sup> Nel contesto dell'integrale di Wiener, funzioni che godono della proprietà (3.49) vengono anche dette *Hölder continue di classe un mezzo*. Questo argomento è discusso ad es. nel testo di McKean citato nella nota 92.

<sup>95</sup> Analogamente a quanto avviene per l'integrale di Feynman, ciò *non* è in contrasto col postulato W1: la probabilità che  $\Sigma$  si muova lungo molti cammini *a priori* possibili risulta essere *nulla*.

*anche* per un PSMC? Contrariamente a quanto spesso si crede – che il principio di indeterminazione sia “l’emblema” della quantizzazione – la risposta è *affermativa*! È infatti noto da lungo tempo <sup>96</sup> che si ha <sup>97</sup>

$$\Delta x_i \Delta U_j \geq \delta_{ij} D \quad (3.50)$$

ove  $U$  è la velocità osmotica definita dall’eq. (3.30). Vi sono però anche notevoli *diversità* fra gli integrali di Wiener e di Feynman. Prima fra tutte è che  $P(x'', t'' | x', t')[x(\cdot)]$  ha il significato di una probabilità, quindi essa è una grandezza *reale non negativa*, mentre  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$  è una quantità *complessa*. Ne consegue che l’integrale di Wiener è un “vero” *integrale*, in quanto esiste una *misura* (nel senso matematico del termine) su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$  <sup>98</sup>; ciò permette di attribuire un significato matematicamente *rigoroso* all’eq. (3.48) <sup>99</sup>. Altra differenza è che i cammini di Wiener possiedono un significato fisico diretto, e rappresentano le *traiettorie fisiche* di un PSMC fra due punti assegnati  $(x', t')$  e  $(x'', t'')$ . Ulteriormente il loro *carattere fluttuante* (implicato dall’eq. (3.49) <sup>100</sup>) rispecchia le *fluttuazioni gaussiane di fondo* che caratterizzano il PSMC in questione. Osserviamo infine che *non* esistono cammini di Wiener *generalizzati*, simili a quelli considerati nel paragrafo 2.8 <sup>101</sup>.

Prima di concludere questo paragrafo, vogliamo considerare ancora il *processo di Wiener* (questo punto sarà molto utile nel paragrafo 5.2). Abbiamo già visto che esso è descritto dalla probabilità di transizione specificata dall’eq. (3.27). Nello spirito dell’approccio di Wiener, tale processo va definito assegnando – anziché  $P(x'', t'' | x', t')$  – un’opportuna probabilità  $P[x(\cdot)]$  sullo spazio delle sue traiettorie. *Quale?* Dalle eq. (3.43), (3.44), (3.45) e (3.46) è chiaro che si deve avere <sup>102</sup>, <sup>103</sup>

<sup>96</sup> R. Furth, Zeit. Phys. **81**, 143 (1933). Vogliamo sottolineare che anche nell’ambito della formulazione di Nelson della meccanica quantistica vale l’eq. (3.50), che qui esprime proprio il principio di indeterminazione di Heisenberg. Si veda: D. De Falco, S. De Martino S. De Siena, Phys. Rev. Lett. **49**, 181 (1982); S. De Martino and S. De Siena, Nuovo Cimento **79B**, 175 (1984).

<sup>97</sup> Poniamo come di consueto  $\Delta A \equiv \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle^{1/2}$ .

<sup>98</sup> Questa è la famosa *misura di Wiener* (e sue generalizzazioni). Si veda ad es.: M. Kac, *Probability and Related Topics in Physical Sciences* (Interscience, London, 1959); I. M. Gel’fand and A. M. Yaglom, J. Math. Phys. **1**, 48 (1960).

<sup>99</sup> Questa circostanza è in contrasto con quanto avviene per l’integrale di Feynman (si ricordi la nota 23).

<sup>100</sup> Le considerazioni fatte a questo proposito nel paragrafo 2.6 possono essere ripetute qui alla lettera.

<sup>101</sup> Ritorniamo su questo punto nel capitolo 5.

<sup>102</sup> È conveniente estendere l’integrazione da  $-\infty$  a  $+\infty$  nell’eq. (3.51). Quando essa viene inserita nell’eq. (3.43) le due funzioni delta riducono *di fatto* tale integrale all’intervallo considerato ( $t' \leq t \leq t''$ ).

<sup>103</sup> Nell’eq. (3.51) abbiamo ommesso per semplicità il fattore di normalizzazione (si veda al proposito la nota 110).

$$P[x(\cdot)] \sim \exp \left\{ -(1/4D) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \dot{x}_i(t) \dot{x}_i(t) \right\}. \quad (3.51)$$

3.10 – È evidente che la formulazione di Feynman della meccanica quantistica è concettualmente sullo *stesso piano* della descrizione di Wiener di un PSMC. Scriviamo simbolicamente

$$\begin{array}{c} \text{FORMULAZIONE} \\ \text{DI WIENER} \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \text{FORMULAZIONE} \\ \text{DI FEYNMAN.} \end{array} \quad (3.52)$$

Tuttavia la somiglianza fra le due descrizioni è in realtà ben *più profonda* di quanto espresso dall'eq. (3.52). Sussiste infatti l'ulteriore corrispondenza

$$P(x'', t'' | x', t')[x(\cdot)] \longleftrightarrow \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)], \quad (3.53)$$

$$-\tilde{S}[x(\cdot)]_{t'}^{t''} \longleftrightarrow (i/\hbar) S[x(\cdot)]_{t'}^{t''}, \quad (3.54)$$

$$\tilde{L}(x, \dot{x}, t) \longleftrightarrow L(x, \dot{x}, t), \quad (3.55)$$

di cui ci si rende conto immediatamente confrontando le formule dei paragrafi 2.4 e 3.9. Cosa ancor più importante, la *forma esplicita* di  $\tilde{S}[x(\cdot)]$  è molto simile a quella di  $S[x(\cdot)]$ , per cui scriviamo *simbolicamente*

$$\tilde{S}[x(\cdot)]_{t'}^{t''} \simeq S[x(\cdot)]_{t'}^{t''}. \quad (3.56)$$

Peraltro l'eq. (3.56) non deve stupire, dato che abbiamo già visto che la *forma esplicita* dell'equazione di Fokker-Planck è molto simile a quella dell'equazione di Schrödinger nel caso in questione.

Vogliamo adottare ora un punto di vista *completamente diverso*. Supporremo di conoscere *sia* quanto detto finora sui processi stocastici classici *che* l'usuale formulazione della teoria quantistica; ma *ignoreremo* l'approccio di Feynman. Il nostro scopo sarà mostrare come quest'ultimo possa essere *derivato completamente* dalla formulazione di Wiener di un PSMC!

Cominciamo notando che si può giungere all'eq. (3.53) in un modo alternativo: basta far uso dell'eq. (3.1). Pertanto l'eq. (2.37) segue immediatamente dall'eq. (3.47), in virtù delle eq. (3.19) e (3.53). A questo punto si tratta di dedurre  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$  da  $P(x'', t'' | x', t')[x(\cdot)]$ , il che significa di fatto ottenere  $S[x(\cdot)]$  a partire da  $\tilde{S}[x(\cdot)]$ . Sappiamo peraltro che sussiste una *corrispondenza completa* fra la dinamica quantistica considerata e un PSMC,

espressa dalle eq. (3.39), (3.40) e (3.41). Grazie a queste equazioni,  $\tilde{L}(x, \dot{x}, t)$  diventa

$$L'(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{4\epsilon}(\dot{x}_i - \Theta_i(x, t))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \Theta_i(x, t) + \mathcal{D}(x, t) \quad (3.57)$$

ed usando le definizioni (3.35), (3.36) e (3.37) abbiamo

$$S'[x(\cdot)]_{t'}^{t''} = -\frac{i}{\hbar} S[x(\cdot)]_{t'}^{t''}. \quad (3.58)$$

Riotteniamo così l'eq. (3.56) in forma più precisa. La corrispondenza appena menzionata implica che  $\tilde{S}[x(\cdot)]$  nell'eq. (3.44) vada sostituita con  $S'[x(\cdot)]$  al fine di passare alla meccanica quantistica. Ma in forza delle eq. (3.53) e (3.58), l'eq. (3.44) fornisce proprio l'eq. (2.36).

Questo semplice esercizio dimostra *esplicitamente* quanto già anticipato nel paragrafo 3.5: se le analogie fra teoria quantistica e processi stocastici classici di cui ci siamo diffusamente occupati fossero state capite fin dai primi tempi della meccanica quantistica, la scoperta dell'integrale di Feynman sarebbe potuta avvenire vent'anni prima<sup>104</sup>.

#### §4. Osservazioni storiche

Prima di presentare la traduzione dell'articolo originale, pubblicato nel 1948, ci sembra opportuno discutere brevemente le motivazioni che hanno spinto Feynman a cercare una formulazione alternativa della teoria quantistica.

A tal fine è necessario considerare la situazione della fisica teorica negli anni '40, periodo fondamentale per la formazione intellettuale di Feynman. A quell'epoca il problema centrale consisteva nel cercare una formulazione

---

<sup>104</sup> Un problema molto interessante di storia della fisica sarebbe capire perché ciò *non* sia avvenuto. Vogliamo avanzare qui solo qualche congettura. Per quanto ne sappiamo, nessun probabilista aveva compreso (almeno inizialmente) che l'integrale di Wiener poteva venire generalizzato in modo tale da fornire il propagatore dell'equazione di Fokker-Planck (probabilità di transizione) nel *caso generale*. È stato proprio sotto l'influenza diretta di Feynman che Kac (suo collega alla Cornell University) ha esteso nel 1947 l'integrale di Wiener in modo da tenere conto di  $\Delta(x, t) \neq 0$  nell'equazione di Fokker-Planck (sempre però supponendo  $V(x, t) = 0$ ). Un'ulteriore generalizzazione si è avuta nel 1953 ad opera di Onsager e Machlup (si veda la nota 85). Vediamo che lo sviluppo storico è *opposto* all'ordine logico seguito nel paragrafo 3.10! Parrebbe anche ovvio che Wiener stesso si sarebbe dovuto accorgere della rilevanza del suo lavoro pionieristico per la teoria quantistica, anticipando così la scoperta di Feynman... È quindi sorprendente constatare che egli ha sì cercato di applicare il suo integrale funzionale alla meccanica quantistica, ma in modo *antitetico* a quanto sarebbe naturale aspettarsi sulla base delle considerazioni fatte in questo capitolo (N. Wiener and A. Siegel, Phys. Rev. **91**, 1551 (1953); A. Siegel and N. Wiener, Phys. Rev. **101**, 429 (1956); si veda anche: G. Della Riccia and N. Wiener, J. Math. Phys. **166**, 1372 (1966)).

*matematicamente coerente* dell'elettrodinamica quantistica: le principali difficoltà nascevano dalla presenza di *divergenze* (infiniti) in molti calcoli.

Feynman cominciò a riflettere su questi argomenti quando era ancora un giovane studente al Massachusetts Institute of Technology, facendosi un'opinione molto personale – però non corretta – sull'origine degli infiniti in elettrodinamica quantistica. Egli si convinse che l'esistenza di tali divergenze fosse sostanzialmente riconducibile a *due* circostanze. La prima è l'energia *infinita* dovuta all'autointerazione di un elettrone, difficoltà che esiste naturalmente già a livello classico. La seconda nasce dal fatto che un campo elettromagnetico quantizzato (in una regione limitata dello spazio) è equivalente ad un insieme di *infiniti* oscillatori armonici quantistici (uno per ogni grado di libertà del campo). È ben noto che, secondo la meccanica quantistica, l'energia dello stato fondamentale di un oscillatore armonico *non* è nulla. Pertanto l'energia del campo elettromagnetico risulta *infinita* (oggi sappiamo che essa può venire eliminata in modo banale).

A Feynman sembrò evidente che per superare queste difficoltà bastassero due semplici assunzioni:

- a) una carica elettrica agisce solo su *altre* cariche, ma non su se stessa;
- b) il campo elettromagnetico *non esiste*.

Egli era convinto che in tal modo si sarebbero potuti risolvere i problemi a livello *classico*, e sperava che la teoria potesse essere quantizzata facilmente, ottenendo così un'elettrodinamica quantistica priva di divergenze. Superficialmente, l'ipotesi b può apparire paradossale. Tuttavia va tenuto presente che (a livello classico) l'esistenza del campo elettromagnetico si manifesta *esclusivamente* come una forza su particelle cariche. È quindi possibile pensare che fra cariche elettriche esistano forze che agiscono “*a distanza*”, cioè senza la “*mediazione*” del campo elettromagnetico (ovviamente si deve supporre che queste forze non siano istantanee ma si propagano con la velocità della luce).

Poco dopo essersi trasferito a Princeton per compiere gli studi di Ph. D. sotto la guida di J. A. Wheeler, Feynman si rese però conto che nei suoi argomenti vi era un grave errore. Se si accelera una carica *A*, essa irraggia, perde energia e quindi decelera: questo effetto non dipende dalla presenza di altre cariche ed è spiegato convenzionalmente proprio dall'azione della carica su se stessa (mediata dal campo elettromagnetico). Ma come si può spiegare tale decelerazione escludendo l'autointerazione? L'unica ipotesi possibile è che ci debbano *sempre* essere altre cariche *B* che agiscono su *A*. Tuttavia le forze dovute alle cariche *B* si propagano con velocità finita e risulta che l'effetto della decelerazione di *A* avviene “*troppo tardi*”.

A questo punto Wheeler fece un'ipotesi rivoluzionaria: le cariche *B* agiscono su *A* attraverso le “*soluzioni anticipate*” delle equazioni di Maxwell, che si propagano all'*indietro* nel tempo con la velocità della luce (è ben noto che usualmente tali soluzioni non vengono considerate perché sono in

evidente contrasto con la causalità). Feynman e Wheeler furono così in grado di spiegare *quantitativamente* la perdita di energia per irraggiamento. Più precisamente, la loro assunzione è che la forza agente su una carica sia data (come di consueto) dalla forza di Lorentz (per semplicità consideriamo qui l'approssimazione semirelativistica)

$$m\ddot{x}_i = q[E_i + (v \times B)_i] \quad (4.1)$$

nella quale i campi  $E$  e  $B$  abbiano *però* la forma

$$E = \frac{1}{2}(E_{rit} + E_{ant}), \quad (4.2)$$

$$B = \frac{1}{2}(B_{rit} + B_{ant}), \quad (4.3)$$

ove i suffissi “rit” e “ant” indicano rispettivamente le soluzioni ritardate ed anticipate delle equazioni di Maxwell.

Una domanda sorge spontanea. Nonostante il successo ottenuto nel caso sopra considerato, com'è possibile conciliare *in generale* l'esistenza dei campi anticipati con la causalità? Abbiamo già visto che è possibile spiegare correttamente la perdita di energia per irraggiamento secondo i postulati a) e b) *solo* supponendo l'esistenza di *altre* cariche nello spazio. È proprio sfruttando la presenza di queste cariche che Feynman e Wheeler sono riusciti a mostrare come i campi anticipati vengano assorbiti *completamente*, evitando così contraddizioni con la causalità. Questi notevoli risultati sono stati ottenuti verso la fine del 1940 ma pubblicati solo dopo la guerra (J. A. Wheeler and R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **17**, 157 (1945)).

Successivamente Feynman e Wheeler sono anche riusciti a porre la loro teoria in una forma matematicamente molto elegante. Sostanzialmente l'intero elettromagnetismo classico – formulato usualmente in termini di forza di Lorentz ed equazioni di Maxwell – viene ridotto qui ad un semplice *principio variazionale* in cui compaiono *solo* le cariche elettriche. La sua forma esplicita è (nel caso di  $n$  particelle con masse  $m_i$  e cariche  $q_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ))

$$S = \sum_{i=1}^n m_i \int da_i (\dot{x}_\mu^{(i)}(a_i) \dot{x}^{\mu(i)}(a_i))^{1/2} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i q_j \int \int da_i da_j \dot{x}_\mu^{(i)}(a_i) \dot{x}^{\mu(j)}(a_j) \delta(R_{ij}^2) \quad (4.4)$$

con

$$R_{ij}^2 \equiv (x_\mu^{(i)}(a_i) - x_\mu^{(j)}(a_j))(x^{\mu(i)}(a_i) - x^{\mu(j)}(a_j)). \quad (4.5)$$

Nelle eq. (4.4) e (4.5)  $x_\mu^{(i)}(a_i)$  è la traiettoria quadridimensionale dell' $i$ -esima particella espressa in funzione di un parametro invariante  $a_i$ ; si è quindi posto  $\dot{x}_\mu^{(i)}(a_i) = dx_\mu^{(i)}(a_i)/da_i$ . Chiaramente il primo integrale nell'eq. (4.4) è l'usuale azione relativistica per le particelle libere, mentre il secondo rappresenta l'interazione elettromagnetica fra le cariche. Si noti che il fattore  $1/2$  assicura che ogni coppia sia contata una sola volta ed il termine  $i = j$  è omissso per evitare l'autointerazione. La funzione delta di Dirac  $\delta(\dots)$  implica che l'interazione fra una coppia di cariche avvenga solo quando una si trova sul cono di luce dell'altra, garantendo così che l'"azione a distanza" elettromagnetica si propaghi con la velocità della luce. Come di consueto, le traiettorie dinamiche del sistema di cariche considerato si ottengono mediante un principio di minima azione applicato ad  $S$  (data dall'eq. (4.4)), richiedendo cioè che si abbia  $\delta S = 0$  per piccole variazioni  $\delta x_\mu^{(i)}(a_i)$  delle traiettorie (J. A. Wheeler and R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **21**, 425 (1949)).

Feynman era riuscito così a realizzare la prima parte del proprio programma. A questo punto si trattava di quantizzare la teoria. Sul finire del 1940 egli espose i risultati ottenuti in un seminario a Princeton, a cui parteciparono anche Einstein, Pauli, Von Neumann, Russel e Wigner. In un seminario successivo, Wheeler avrebbe dovuto discutere la corrispondente versione quantistica. Pauli era molto interessato a questo argomento, e volle chiedere a Feynman a quali conclusioni fosse giunto Wheeler. Feynman rispose che non ne era al corrente, al che la replica di Pauli fu: "Oh, il professore non racconta i suoi risultati all'assistente? Probabilmente il professore non ha ottenuto alcun risultato". Ed infatti il seminario che Wheeler aveva annunciato non ebbe mai luogo!

Per motivi contingenti (dovuti all'inizio della guerra) Wheeler non ebbe più tempo per occuparsi di questi problemi, cosicché Feynman si trovò a portare avanti il proprio programma da solo.

Quantizzare una teoria classica è di solito un'impresa piuttosto facile. Basta porre tale teoria in forma hamiltoniana e sostituire le coordinate e gli impulsi con i corrispondenti operatori (secondo le regole ben note). Inizialmente Feynman cercò di seguire questa via, ma presto si rese conto di una grossa difficoltà. A causa del fatto che nel secondo termine dell'eq. (4.4) compaiono *due* integrazioni indipendenti, la teoria *non* possiede alcuna hamiltoniana! È evidente che il metodo di quantizzazione usuale *non* può essere applicato alla elettrodinamica di Feynman e Wheeler.

Come procedere allora? Un aiuto insperato giunse a Feynman da un incontro casuale con H. Jehle. Questi era appena giunto a Princeton dall'Europa e – durante un party – chiese a Feynman di cosa si stesse occupando. "Sto bevendo birra" rispose scherzando Feynman, che poi però raccontò a Jehle



le difficoltà che stava incontrando nel quantizzare la propria elettrodinamica. Jehle si ricordò che Dirac aveva sviluppato un metodo di quantizzazione basato sull'azione classica anziché sull'hamiltoniana (P. A. M. Dirac, Phys. Zeit. der Sowjetunion **3**; 64 (1933)) e consigliò a Feynman di studiarlo.

È ben noto che la teoria quantistica è stata costruita partendo dalla formulazione hamiltoniana della meccanica classica. Ma quest'ultima può essere espressa equivalentemente secondo la descrizione lagrangiana. Dirac si era posto il problema di ottenere l'*analogo quantistico* della formulazione lagrangiana. Egli si rese conto che era più opportuno considerare il *propagatore quantistico* anziché l'equazione di Schrödinger, e giunse alla conclusione che  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  "corrisponde" a  $\exp\{(i/\hbar)S\}$ , ove

$$S = \int_{t'}^{t''} L(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (4.6)$$

è l'azione classica corrispondente alla lagrangiana  $L(x, \dot{x}, t)$ . Dirac osservò inoltre che nel caso in cui l'intervallo  $t'' - t'$  sia *infinitesimo*  $\exp\{(i/\hbar)S\}$  è "*analogo*" a  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  (è proprio a questa circostanza che si riferisce lo scambio di battute fra Feynman e Dirac riportato nella nota 6). Tuttavia Dirac non riuscì ad andare oltre queste affermazioni piuttosto vaghe.

Come è stato discusso nel capitolo 2, Feynman riuscì a tradurre le suddette intuizioni di Dirac in una formulazione alternativa della teoria quantistica. Questa grande impresa del pensiero scientifico contemporaneo è il soggetto dell'articolo tradotto.

Feynman aveva ora a disposizione un metodo di quantizzazione basato *esplicitamente* sull'azione classica. Naturalmente esso è equivalente alla formulazione usuale nel caso in cui valga l'eq. (4.6), quando cioè la corrispondente teoria classica è esprimibile in forma hamiltoniana. Tuttavia egli era profondamente convinto che il proprio metodo fosse *notevolmente più generale* e permettesse di quantizzare anche teorie classiche *non* hamiltoniane ma formulabili mediante un principio di minima azione – come abbiamo visto, questo è proprio il caso dell'elettrodinamica di Feynman e Wheeler (descritta dall'azione (4.4)). In altre parole, Feynman pensava che fosse sufficiente inserire l'azione classica (4.4) nel suo "*integrale sui cammini*" per ottenere un'elettrodinamica quantistica priva di divergenze!

Purtroppo questo programma (alquanto ambizioso) non è mai stato realizzato. Ciò che in realtà Feynman è riuscito a fare è stato *reformulare* la meccanica e l'elettrodinamica quantistica in un modo diverso, che presenta grandi vantaggi da un punto di vista tecnico. Tuttavia, negli anni '40, egli sperava che l'"*integrale sui cammini*" potesse portare alla scoperta di leggi fisiche *nuove*, non rappresentabili nell'ambito del formalismo hamiltoniano. La dimostrazione – ottenuta proprio nell'articolo tradotto – che l'"*integrale*

*sui cammini*” è di fatto *equivalente* al metodo hamiltoniano è quindi apparsa a Feynman come il fallimento del proprio programma originario!

# Approccio spazio-temporale alla meccanica quantistica non relativistica<sup>†</sup>\*

R. P. FEYNMAN

*Cornell University, Ithaca, New York*

La meccanica quantistica non relativistica è formulata qui in un modo diverso, che è tuttavia matematicamente equivalente alla formulazione usuale. In meccanica quantistica la probabilità di un evento che si può verificare secondo varie alternative è il modulo quadrato di una somma di contributi complessi, ciascuno corrispondente ad una alternativa differente. La probabilità che la traiettoria di una particella  $x(t)$  sia contenuta in una certa regione dello spazio-tempo è il quadrato di una somma di contributi, ognuno proveniente da un cammino in tale regione. Si postula che il contributo di un singolo cammino sia un esponenziale la cui fase (immaginaria) è l'azione classica (in unità di  $\hbar$ ) per il cammino considerato. Il contributo complessivo di tutti i cammini che raggiungono  $x, t$  dal passato è la funzione d'onda  $\psi(x, t)$  che soddisfa l'equazione di Schrödinger. Oltre a dimostrare questo fatto, si discute la relazione con l'algebra delle matrici e degli operatori. Alcune applicazioni sono indicate, in particolare come eliminare le coordinate degli oscillatori di campo dalle equazioni dell'elettrodinamica quantistica.

## 1. INTRODUZIONE

È un fatto storico curioso che la moderna teoria quantistica sia iniziata con due formulazioni matematiche completamente diverse: l'equazione differenziale di Schrödinger e l'algebra delle matrici di Heisenberg. È stato dimostrato che questi due approcci così diversi sono matematicamente equivalenti. I suddetti punti di vista sono complementari e si fondono nella teoria delle trasformazioni di Dirac.

Il presente lavoro descrive quella che è essenzialmente una terza formulazione della meccanica quantistica, che fu suggerita da alcune osservazioni di

---

<sup>†</sup> Reviews of Modern Physics **20** (1948) 367–387.

\* Le note sono quelle originali e la loro numerazione è indipendente da quella delle altre parti del presente Quaderno.

Dirac<sup>1,2</sup> riguardanti la relazione fra azione classica<sup>3</sup> e meccanica quantistica. Un'ampiezza di probabilità è associata all'intera traiettoria di una particella come funzione del tempo, anziché semplicemente alla posizione della particella ad un particolare istante.

Questa formulazione è matematicamente equivalente a quella usuale e pertanto non ci sono risultati essenzialmente nuovi. Vi è tuttavia un senso di piacere nel riconoscere vecchie cose da un nuovo punto di vista. Ci sono inoltre problemi per i quali il nuovo approccio offre un netto vantaggio. Ad esempio, se due sistemi  $A$  e  $B$  interagiscono, le coordinate di uno dei sistemi, diciamo  $B$ , possono essere eliminate dalle equazioni che descrivono il moto di  $A$ . L'interazione con  $B$  è rappresentata da una modifica della formula per l'ampiezza di probabilità associata alla traiettoria di  $A$ . Ciò è analogo alla situazione classica in cui l'effetto di  $B$  può essere rappresentato da una modifica delle equazioni del moto di  $A$  (mediante l'introduzione di termini che rappresentano le forze agenti su  $A$ ). In questo modo le coordinate degli oscillatori di campo (sia trasversali che longitudinali) possono essere eliminate dalle equazioni dell'elettrodinamica quantistica.

C'è poi sempre la speranza che il nuovo punto di vista possa suggerire un'idea per modificare le teorie attuali, modifiche necessarie per rendere conto degli esperimenti più recenti.

Discuteremo dapprima il concetto generale di sovrapposizione delle ampiezze di probabilità in meccanica quantistica. Mostreremo quindi come questo concetto possa essere generalizzato per definire un'ampiezza di probabilità per ogni cammino (posizione *vs.* tempo) nello spazio-tempo. Dimostreremo che l'ordinaria meccanica quantistica risulta dal postulato che tale ampiezza di probabilità abbia una fase proporzionale all'azione, calcolata classicamente, per questo cammino. Ciò è vero quando l'azione è l'integrale temporale di una funzione quadratica della velocità. La relazione con l'algebra delle matrici e degli operatori verrà discussa usando un linguaggio che è il più vicino possibile alla nuova formulazione. Non c'è alcun vantaggio pratico nel far questo, però le formule sono molto utili nel caso in cui si consideri un'estensione ad una classe più ampia di funzionali d'azione. Discuteremo infine alcune applicazioni. Come esempio mostreremo in che modo le coordinate di un oscillatore armonico possano essere eliminate dalle equazioni del moto di un sistema con cui esso interagisce. Tale risultato può essere applicato direttamente all'elettrodinamica quantistica. Verrà anche descritta un'estensione

---

<sup>1</sup> P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (The Clarendon Press, Oxford, 1935), seconda edizione, capitolo 33; vedasi anche *Physik. Zeits. Sowjetunion* **3**, 64 (1933).

<sup>2</sup> P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 195 (1945).

<sup>3</sup> In questo articolo il termine "azione" verrà usato per indicare l'integrale temporale della lagrangiana lungo una traiettoria. Nel caso in cui tale traiettoria sia effettivamente quella di una particella che si muove classicamente, il suddetto integrale prende il nome di prima funzione principale di Hamilton.

formale che include gli effetti dello spin e della teoria della relatività.

## 2. LA SOVRAPPOSIZIONE DELLE AMPIEZZE DI PROBABILITÀ

La formulazione che presenteremo contiene come elemento essenziale l'idea di ampiezza di probabilità associata ad un moto completamente specificato come funzione del tempo. È pertanto conveniente riesaminare in dettaglio il concetto quantistico di sovrapposizione delle ampiezze di probabilità. Analizzeremo i cambiamenti basilari richiesti per il passaggio dalla fisica classica a quella quantistica.

Si consideri a tal fine un esperimento ideale in cui possiamo fare tre misure successive: prima di una grandezza  $A$ , poi di  $B$  ed infine di  $C$ . Non c'è motivo per cui queste grandezze debbano essere diverse, e considereremo l'esempio di tre misure successive della posizione. Si supponga che  $a$  sia un possibile risultato della misura di  $A$ , e analogamente per  $b$  e  $c$ <sup>4</sup>. Assumeremo che le misure di  $A$ ,  $B$  e  $C$  specificano completamente lo stato del sistema in senso quantistico. Ciò significa, ad esempio, che lo stato in cui  $B$  ha il valore  $b$  non è degenero.

È ben noto che in meccanica quantistica si si ha a che fare con delle probabilità, ma naturalmente ciò è ben lungi dal caratterizzare il mondo quantistico. Al fine di mostrare con più chiarezza la relazione tra meccanica classica e teoria quantistica potremmo supporre che anche classicamente si considerino delle probabilità, ma che tutte le probabilità siano zero o uno. Un'alternativa migliore è di immaginare le probabilità classiche nel senso della meccanica statistica classica (ove, in generale, le coordinate interne non sono specificate completamente).

Indichiamo con  $P_{ab}$  la probabilità che se la misura di  $A$  fornisce il risultato  $a$ , allora la misura di  $B$  dia il risultato  $b$ . Similmente  $P_{bc}$  sarà la probabilità che la misura di  $C$  dia il risultato  $c$  nell'ipotesi che la misura di  $B$  abbia fornito il risultato  $b$ . Analogamente per  $P_{ac}$ . Indicheremo infine con  $P_{abc}$  la probabilità di ottenere i risultati  $b$  e  $c$  supposto che la misura di  $A$  dia  $a$ . Ora, se gli eventi fra  $a$  e  $b$  sono indipendenti da quelli fra  $b$  e  $c$ , si ha

$$P_{abc} = P_{ab}P_{bc}. \quad (1)$$

Ciò è in accordo con la meccanica quantistica quando l'affermazione che  $B$  fornisce il risultato  $b$  è una specificazione completa dello stato.

In ogni caso, ci aspettiamo che valga la relazione

---

<sup>4</sup> Nella nostra discussione non ha importanza che alcuni valori di  $a$ ,  $b$  o  $c$  possano essere esclusi dalla meccanica quantistica ma non dalla meccanica classica. Si può infatti assumere, per semplicità, che i valori numerici siano gli stessi in entrambi i casi, ma che la probabilità di certi valori possa essere zero.

$$P_{ac} = \sum_b P_{abc} \quad (2)$$

perché, se inizialmente la misura di  $A$  dà  $a$  e successivamente il risultato della misura di  $C$  è  $c$ , la quantità  $B$  deve avere avuto qualche valore ad un tempo intermedio fra quelli corrispondenti alle misure di  $A$  e  $C$ : la probabilità che tale valore sia  $b$  è  $P_{abc}$ ; quindi sommiamo, o integriamo, su tutte le alternative mutuamente esclusive per  $b$  (tale operazione è schematizzata da  $\sum_b$ ).

Ora, la differenza essenziale fra fisica classica e fisica quantistica sta proprio nell'eq. (2). In meccanica classica essa è sempre vera, mentre in meccanica quantistica spesso risulta essere falsa. Indicheremo con  $P_{ac}^q$  la probabilità quantistica che una misura di  $C$  dia  $c$  quando segue una misura di  $A$  che dà come risultato  $a$ . L'eq. (2) è sostituita in meccanica quantistica da questa legge notevole<sup>5</sup>: esistono numeri complessi  $\varphi_{ab}, \varphi_{bc}, \varphi_{ac}$  tali che

$$P_{ab} = |\varphi_{ab}|^2, P_{bc} = |\varphi_{bc}|^2, P_{ac}^q = |\varphi_{ac}|^2. \quad (3)$$

La legge classica, ottenuta combinando le eq. (1) e (2)

$$P_{ac} = \sum_b P_{ab}P_{bc} \quad (4)$$

è sostituita da

$$\varphi_{ac} = \sum_b \varphi_{ab}\varphi_{bc}. \quad (5)$$

Se l'eq. (5) è corretta, l'eq. (4) non è valida in generale. L'errore logico fatto nel dedurre l'eq. (4) consiste ovviamente nell'assunzione che per andare da  $a$  a  $c$  il sistema debba passare attraverso una condizione tale che  $B$  debba avere un valore definito  $b$ .

Se si cerca di verificare questa affermazione, cioè se la grandezza  $B$  è misurata fra due misure di  $A$  e  $C$ , allora la formula (4) è di fatto corretta. Più precisamente, se l'apparato per misurare  $B$  è preparato e usato, ma non si cerca di utilizzare i risultati delle misura di  $B$  – nel senso che solo le correlazioni fra  $A$  e  $C$  sono misurate e usate – allora l'eq. (4) è corretta. Questo perché l'apparato che misura  $B$  ha “fatto il suo lavoro”. Se vogliamo,

---

<sup>5</sup> Abbiamo supposto che  $b$  sia uno stato non degenerare, e che pertanto l'eq. (1) sia valida. Presumibilmente, se in qualche generalizzazione della meccanica quantistica l'eq. (1) non fosse più valida (nemmeno per gli stati puri  $b$ ), sarebbe da aspettarsi che l'eq. (2) venisse sostituita dall'affermazione: "ci sono numeri complessi  $\varphi_{abc}$  tali che  $P_{abc} = |\varphi_{abc}|^2$ ". L'analogo dell'eq. (5) è allora  $\varphi_{ac} = \sum_b \varphi_{abc}$ .

possiamo leggere gli strumenti senza disturbare ulteriormente il sistema. Gli esperimenti che hanno fornito i risultati  $a$  e  $c$  possono quindi essere raggruppati a seconda dei valori di  $b$ .

Considerando le probabilità da un punto di vista frequentistico, l'eq. (4) segue semplicemente dall'affermazione che in ogni esperimento che dà  $a$  e  $c$ ,  $B$  ha qualche valore. L'unico modo in cui l'eq. (4) può essere sbagliata è che l'affermazione “ $B$  ha qualche valore” debba essere talvolta priva di senso. Si noti che l'eq. (5) sostituisce l'eq. (4) solo nel caso in cui non cerchiamo di misurare  $B$ . Siamo quindi portati a dire che l'affermazione “ $B$  ha qualche valore” può essere priva di significato ogniqualevolta non cerchiamo di misurare  $B$  <sup>6</sup>.

Abbiamo dunque risultati diversi per le correlazioni di  $a$  e  $c$  – cioè l'eq. (4) o l'eq. (5) – a seconda del caso che la misura di  $B$  venga effettuata oppure no. La misura di  $B$  – indipendentemente dalla sua accuratezza – deve disturbare il sistema, almeno di quel tanto che basta per cambiare i risultati da quelli dati dall'eq. (5) a quelli previsti dall'eq. (4) <sup>7</sup>. Che le misure causino necessariamente dei disturbi e che, essenzialmente, l'eq. (4) possa essere falsa fu enunciato con chiarezza da Heisenberg nel suo principio di indeterminazione. La legge (5) è un risultato del lavoro di Schrödinger, dell'interpretazione statistica di Born e Jordan e della teoria delle trasformazioni di Dirac <sup>8</sup>.

L'eq. (5) è una tipica rappresentazione della natura ondulatoria della materia. In essa la probabilità che la particella vada da  $a$  a  $c$  secondo alcune alternative diverse (valori di  $b$ ) può essere rappresentata – se non si cerca di determinare quale alternativa si realizza – come il quadrato della somma di alcune grandezze complesse, una per ogni alternativa disponibile alla particella. La probabilità può mostrare i tipici fenomeni di interferenza, usualmente associati alle onde, la cui intensità è data dal quadrato della somma di contributi da sorgenti distinte. Si può dire che l'elettrone si comporta come un'onda fintanto che non si cerca di verificare che esso è una particella. D'altra parte, si può determinare – se lo si desidera – attraverso quale alternativa esso passa, proprio come se esso fosse una particella. Ma quando si fa ciò, si deve usare

<sup>6</sup> Non serve osservare che *avremmo potuto* misurare  $B$  se avessimo voluto; in realtà, non lo abbiamo fatto.

<sup>7</sup> Il modo in cui l'eq. (4) segue dall'eq. (5) quando una misurazione disturba il sistema è stato studiato soprattutto da J. von Neumann (*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Dover Publications, New York, 1943)). L'effetto della perturbazione dovuta all'apparato di misura è di alterare la fase delle componenti che interferiscono – ad es.  $\theta_b$  – in modo tale che la (5) diventi  $\varphi_{ac} = \sum_b e^{i\theta_b} \varphi_{ab} \varphi_{bc}$ . Tuttavia, come mostrato da von Neumann, la variazione di fase deve restare ignota se  $B$  è misurato. Quindi la probabilità corrispondente  $P_{ac}$  è il modulo quadrato di  $\varphi_{ac}$  mediato su tutti i possibili valori delle fasi  $\theta_b$  – in questo modo si ottiene l'eq. (4).

<sup>8</sup> Se  $A$  e  $B$  sono gli operatori corrispondenti alle misurazioni  $A$  e  $B$  e se  $\psi_a$  e  $\chi_b$  sono le soluzioni di  $A\psi_a = a\psi_a$  e  $B\chi_b = b\chi_b$ , allora si ha  $\varphi_{ab} = \int \chi_b^* \psi_a dx = (\chi_b^*, \psi_a)$ . Quindi  $\varphi_{ab}$  è l'elemento  $(a|b)$  della matrice di trasformazione per il passaggio dalla rappresentazione in cui  $A$  è diagonale a quella in cui  $B$  è diagonale.

l'eq. (4), ed esso si comporta effettivamente come una particella.

Naturalmente queste sono cose ben note e sono già state spiegate ripetutamente <sup>9</sup>. Ci sembra tuttavia che valga la pena di sottolineare il fatto che esse seguono direttamente dall'eq. (5), la quale gioca un ruolo fondamentale nella nostra formulazione della meccanica quantistica.

La generalizzazione delle eq. (4) e (5) a un grande numero di misure  $A, B, C, D, \dots, K$  è ovviamente che la probabilità della sequenza  $a, b, c, d, \dots, k$  risulta essere

$$P_{abcd\dots k} = |\varphi_{abcd\dots k}|^2.$$

Ad esempio, la probabilità del risultato  $a, c, k$ , se  $b, d, \dots$  sono misurate è data dalla formula classica

$$P_{ack} = \sum_b \sum_d \dots P_{abcd\dots k} \quad (6)$$

mentre nel caso in cui nessuna misura sia effettuata fra  $A$  e  $C$  e fra  $C$  e  $K$  la probabilità della stessa sequenza  $a, c, k$  è

$$P_{ack}^q = \left| \sum_b \sum_d \dots \varphi_{abcd\dots k} \right|^2. \quad (7)$$

La grandezza  $\varphi_{abcd\dots k}$  può essere chiamata ampiezza di probabilità per la condizione  $A = a, B = b, C = c, D = d, \dots, K = k$  (ovviamente essa è esprimibile come un prodotto  $\varphi_{ab}\varphi_{bc}\varphi_{cd} \dots \varphi_{jk}$ ).

### 3. L'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ PER UN CAMMINO SPAZIO-TEMPORALE

Le idee fisiche del paragrafo precedente possono essere estese facilmente per definire un'ampiezza di probabilità per un particolare cammino spaziotemporale completamente specificato. Al fine di spiegare come ciò possa essere fatto ci limiteremo ad un problema unidimensionale, in quanto l'estensione al caso multidimensionale è ovvia.

Supponiamo di avere una particella che può assumere parecchi valori di una coordinata  $x$ . Immaginiamo di fare un numero enorme di misure di posizione, separate da un piccolo intervallo di tempo  $\epsilon$ . Allora una successione di misure come quelle di  $A, B, C, \dots$  può essere la serie di misure della coordinata  $x$  ai tempi successivi  $t_1, t_2, t_3, \dots$  ove  $t_{i+1} = t_i + \epsilon$ . Sia  $x_i$  il risultato

---

<sup>9</sup> Si veda ad es.: W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory* (University of Chicago Press, Chicago, 1930), soprattutto il capitolo IV.



della misura della coordinata  $x$  al tempo  $t_i$ . Quindi, se  $A$  è  $x$  al tempo  $t_1$ , allora  $x_1$  è ciò che prima indicavamo con  $a$ . Da un punto di vista classico i valori successivi  $x_1, x_2, x_3, \dots$  della coordinata definiscono praticamente un cammino  $x(t)$ . Alla fine, ci aspettiamo di prendere il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

La probabilità di tale cammino è una funzione di  $x_1, \dots, x_i, \dots$  che indichiamo con  $P(\dots, x_i, x_{i+1}, \dots)$ . La probabilità che il cammino sia contenuto in una certa regione  $R$  dello spazio-tempo è data classicamente dall'integrale di  $P$  su tale regione. Così la probabilità che  $x_i$  sia compreso fra  $a_i$  e  $b_i$ ,  $x_{i+1}$  fra  $a_{i+1}$  e  $b_{i+1}$ , etc. è

$$\begin{aligned} \dots \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_{i+1}}^{b_{i+1}} \dots P(\dots x_i, x_{i+1}, \dots) \dots dx_i dx_{i+1} \dots = \\ \int_R P(\dots x_i, x_{i+1}, \dots) \dots dx_i dx_{i+1} \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

ove il simbolo  $\int_R$  significa che l'integrazione deve essere effettuata sui valori delle variabili che stanno nella regione  $R$ . Questa è semplicemente l'eq. (6), con  $a, b, \dots$  sostituiti da  $x_1, x_2, \dots$  e con la somma sostituita dall'integrale.

In meccanica quantistica questa è la formula corretta per il caso in cui tutte le  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$  siano effettivamente misurate e soltanto quei cammini che appartengono ad  $R$  vengano considerati. Ci aspetteremmo un risultato diverso se misurazioni così dettagliate non fossero effettuate. Supponiamo che sia eseguita una misura che è in grado di stabilire soltanto se il cammino considerato è contenuto nella regione  $R$ .

La misura dev'essere ciò che potremmo definire una "misura ideale". Supponiamo cioè che nessun altro dettaglio possa essere ottenuto dalla stessa misura senza disturbare ulteriormente il sistema. Non siamo stati in grado di trovare una definizione precisa. Stiamo cercando di evitare le incertezze addizionali che devono essere eliminate con una operazione di media se, ad esempio, una maggiore informazione fosse misurata senza venire utilizzata. Desideriamo usare l'eq. (5) o l'eq. (7) per tutte le  $x_i$ , senza avere alcuna parte residua su cui sommare come nell'eq. (4).

Ci aspettiamo che la probabilità di trovare – tramite la nostra "misura ideale" – la particella nella regione  $R$  sia il quadrato di un numero complesso  $|\varphi(R)|^2$ . Il numero  $\varphi(R)$  – che possiamo chiamare ampiezza di probabilità per la regione  $R$  – è dato dall'eq. (7) con  $a, b, \dots$  sostituiti da  $x_i, x_{i+1}, \dots$  e la somma sostituita da un integrale

$$\varphi(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \Phi(\dots x_i, x_{i+1}, \dots) \dots dx_i dx_{i+1} \dots \quad (9)$$

Il numero complesso  $\Phi(\cdots x_i, x_{i+1} \cdots)$  è una funzione delle variabili  $x_i$  che definiscono il cammino. In realtà immaginiamo che la spaziatura temporale  $\epsilon$  vada a zero cosicché  $\Phi$  viene a dipendere dall'intero cammino  $x(t)$ , anziché soltanto dai valori di  $x_i$  ai particolari tempi  $t_i$ ,  $x_i = x(t_i)$ . Potremmo chiamare  $\Phi$  funzionale ampiezza di probabilità dei cammini  $x(t)$ .

Riassumiamo queste idee nel nostro primo postulato:

*I. Se si effettua una misura ideale per determinare se il cammino di una particella è contenuto in una regione dello spazio-tempo, la probabilità che il risultato sia positivo è data dal modulo quadrato di una somma di contributi complessi, uno da ciascun cammino in quella regione.*

L'affermazione del postulato è incompleta. L'espressione "somma di termini, uno per ogni cammino" è ambigua. Il significato preciso dell'eq. (9) è il seguente. Un cammino è inizialmente definito solo dalle posizioni  $x_i$  per le quali esso passa ad una successione di tempi ugualmente spazati <sup>10</sup>  $t_i = t_{i-1} + \epsilon$ . Allora tutti i valori delle coordinate nella regione  $R$  hanno ugual peso. Il valore del peso dipende da  $\epsilon$ , e può essere scelto in modo tale che la probabilità di un evento certo sia normalizzata a uno. Questo modo di procedere può non essere il migliore, ma abbiamo lasciato questo fattore di peso in una costante di proporzionalità specificata dal secondo postulato. Alla fine del calcolo si deve prendere il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Quando il sistema ha diversi gradi di libertà, lo spazio delle coordinate  $x$  è multidimensionale, cosicché il simbolo  $x$  rappresenta un insieme di coordinate  $(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)})$  per un sistema con  $k$  gradi di libertà. Un cammino è una sequenza di configurazioni a tempi successivi, ed è descritto dando le configurazioni  $x_i$  o  $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(k)})$ , cioè i valori di ciascuna delle  $k$  coordinate ad ogni tempo  $t_i$ . Il simbolo  $dx_i$  indicherà l'elemento di volume dello spazio delle configurazioni  $k$ -dimensionale (al tempo  $t_i$ ). L'affermazione del postulato è indipendente dal sistema di coordinate usato.

Il postulato si limita a definire i risultati di misure di posizione. Per esempio, esso non dice ciò che deve essere fatto per definire il risultato di una misura di impulso. Tuttavia questa non è una vera limitazione, perché – in linea di principio – una misura di impulso su una particella può essere effettuata mediante misure di posizione su altre particelle, per esempio indicatori di distanza. Quindi un'analisi di tale esperimento permetterà di determinare l'impulso della particella originaria.

---

<sup>10</sup> Ci sono problemi matematici molto interessanti connessi al tentativo di evitare la suddivisione e il procedimento di passaggio al limite. Un qualche tipo di misura complessa è associata allo spazio di funzioni  $x(t)$ . Si possono ottenere risultati finiti in circostanze inaspettate perché la misura non è ovunque positiva, ma i contributi della maggior parte dei cammini tendono a cancellarsi. Questi curiosi problemi matematici sono evitati dalla procedura di suddivisione. Tuttavia ci si sente come avrebbe dovuto sentirsi Cavalieri nel calcolare il volume di una piramide prima dell'invenzione del calcolo infinitesimale.

#### 4. CALCOLO DELL'AMPIEZZA DI PROBABILITÀ PER UN CAMMINO

Il primo postulato specifica il tipo di contesto matematico richiesto dalla meccanica quantistica per il calcolo delle probabilità. Il secondo postulato dà un particolare contenuto a questo contesto, indicando come calcolare l'importante quantità  $\Phi$  per ogni cammino:

*II. I cammini contribuiscono ugualmente in modulo, ma la fase dei loro contributi è data dall'azione classica (in unità di  $\hbar$ ), cioè dall'integrale temporale della lagrangiana calcolato lungo il cammino.*

In altre parole, il contributo  $\Phi[x(t)]$  di un dato cammino  $x(t)$  è proporzionale a  $\exp(i/\hbar)S[x(t)]$ , ove l'azione  $S[x(t)] = \int dt L(x(t), \dot{x}(t))$  è l'integrale temporale della lagrangiana classica  $L(x, \dot{x})$  calcolato lungo il cammino considerato. La lagrangiana, che può essere una funzione esplicita del tempo, è una funzione di posizione e velocità. Se supponiamo che essa sia una funzione quadratica delle velocità possiamo mostrare l'equivalenza matematica dei postulati enunciati sopra con la formulazione usuale della meccanica quantistica.

Per interpretare il primo postulato è stato necessario definire un cammino specificando solamente la serie di punti  $x_i$  per cui esso passa ai tempi successivi  $t_i$ . Al fine di calcolare  $S = \int dt L(x, \dot{x})$  dobbiamo conoscere il cammino in tutti i suoi punti, non soltanto gli  $x_i$ . Assumeremo che la funzione  $x(t)$  nell'intervallo fra  $t_i$  e  $t_{i+1}$  sia la traiettoria di una particella classica con lagrangiana  $L$ , che parte da  $x_i$  a  $t_i$  e raggiunge  $x_{i+1}$  a  $t_{i+1}$ . Questa assunzione è richiesta dall'interpretazione del secondo postulato per cammini discontinui. Se lo si desidera, la quantità  $\Phi(\dots x_i, x_{i+1}, \dots)$  può essere normalizzata (per vari  $\epsilon$ ) in modo tale che la probabilità di un evento certo sia normalizzata ad uno per  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Se  $L$  non dipende da derivate della posizione di ordine superiore al primo, le brusche variazioni della velocità che hanno luogo ai tempi  $t_i$  non provocano alcuna difficoltà nell'eseguire l'integrale d'azione. Inoltre, a meno che  $L$  sia ristretta in tal modo, i punti estremi non sono sufficienti a definire la traiettoria classica. Poiché tale traiettoria è quella che minimizza l'azione, possiamo scrivere

$$S = \sum_i S(x_{i+1}, x_i) \quad (10)$$

ove

$$S(x_{i+1}, x_i) = \text{Min.} \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (11)$$

Si vede quindi che l'unico riferimento alla meccanica classica consiste nella specificazione della lagrangiana. Infatti il secondo postulato potrebbe semplicemente essere considerato come l'affermazione “ $\Phi$  è l'esponenziale di  $i$  per l'integrale di una funzione reale di  $x(t)$  e della sua derivata prima”. Corrispondentemente le equazioni classiche del moto potrebbero essere derivate successivamente nel limite di grandi dimensioni. Si potrebbe allora mostrare che la suddetta funzione di  $x(t)$  e  $\dot{x}(t)$  coincide con la lagrangiana classica a meno di un fattore costante.

Di fatto la somma nell'eq. (10) è infinita anche per  $\epsilon$  finito, e quindi priva di significato (a causa dell'infinita estensione del tempo). Questa circostanza riflette un'ulteriore incompletezza dei postulati. Ci dovremo quindi limitare ad un intervallo di tempo arbitrariamente lungo ma finito.

Combinando i due postulati ed usando l'eq. (10) otteniamo

$$\varphi(R) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_R \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_i S(x_{i+1}, x_i) \right] \cdots \frac{dx_{i+1}}{A} \frac{dx_i}{A} \cdots, \quad (12)$$

ove il fattore di normalizzazione è stato scritto come il prodotto di  $1/A$  per ogni istante di tempo (il valore di  $A$  verrà determinato in seguito). L'integrazione è su quei valori  $x_i, x_{i+1}, \dots$  contenuti nella regione  $R$ . Questa equazione, la definizione (11) di  $S(x_{i+1}, x_i)$  e l'interpretazione fisica di  $|\varphi(R)|^2$  come probabilità di trovare la particella in  $R$  completano la nostra formulazione della meccanica quantistica.

## 5. DEFINIZIONE DELLA FUNZIONE D'ONDA

Procediamo ora a dimostrare l'equivalenza di questi postulati con la formulazione ordinaria della meccanica quantistica. Faremo ciò in due stadi. In questo paragrafo mostriamo come la funzione d'onda possa essere definita secondo il nuovo punto di vista. Nel paragrafo seguente mostreremo che questa funzione soddisfa l'equazione di Schrödinger.

Vedremo che è proprio la possibilità (data dall'eq. (10)) di esprimere  $S$  come somma – e quindi  $\Phi$  come prodotto – di contributi di parti successive della traiettoria che ci permette di definire una quantità avente le proprietà di una funzione d'onda.

Al fine di chiarire questo punto, immaginiamo di scegliere un tempo particolare  $t$  e di dividere la regione  $R$  nell'eq. (12) in “futuro” e “passato” rispetto a  $t$ . Supponiamo che  $R$  possa essere decomposto in: (a) una regione  $R'$ , limitata in modo arbitrario nello spazio, ma tutta temporalmente antecedente ad un tempo  $t' < t$ , (b) una regione  $R''$  limitata in modo arbitrario nello spazio, ma tutta temporalmente successiva a  $t'' > t$ ; (c) una regione compresa fra  $t'$

e  $t''$  in cui tutti i valori delle coordinate spaziali sono permessi (cioè tutto lo spazio-tempo fra  $t'$  e  $t''$ ). La regione (c) non è assolutamente necessaria, e può essere scelta ristretta arbitrariamente nel tempo. Tuttavia essa ci permette di variare  $t$  di poco senza dover ridefinire  $R'$  e  $R''$ . Allora  $|\varphi(R', R'')|^2$  è la probabilità che la traiettoria sia contenuta in  $R'$  e in  $R''$ . Essendo  $R'$  temporalmente precedente a  $R''$  e considerando il tempo  $t$  come il presente, possiamo dire che  $|\varphi(R', R'')|^2$  è la probabilità che il cammino sia stato in  $R'$  e sia in  $R''$  nel futuro. Dividendo per la probabilità che la traiettoria sia in  $R'$ , troviamo che  $|\varphi(R', R'')|^2$  è la probabilità (relativa) di trovare il sistema nella regione  $R''$ , nell'ipotesi che esso si trovasse con certezza in  $R'$ .

Questa è ovviamente la quantità fondamentale per predire i risultati di molti esperimenti. Supponiamo di preparare il sistema in un certo modo (ad esempio, esso sia nella regione  $R'$ ) e poi misuriamo qualche altra proprietà (ad esempio, sarà nella regione  $R''$ ?). Cosa ci dice l'eq. (12) riguardo al calcolo di tale probabilità, o meglio di  $\varphi(R', R'')$  di cui essa è il quadrato?

Supponiamo che nell'eq. (12) l'istante  $t$  corrisponda ad un punto particolare  $k$  della suddivisione del tempo in intervalli  $\epsilon$ ; assumiamo cioè  $t = t_k$  (naturalmente l'indice  $k$  dipende dalla particolare suddivisione considerata). Poiché l'esponenziale contiene una somma, esso può essere scritto come il prodotto di due fattori

$$\exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=k}^{\infty} S(x_{i+1}, x_i) \right] \cdot \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=-\infty}^{i=k-1} S(x_{i+1}, x_i) \right]. \quad (13)$$

Il primo fattore contiene soltanto coordinate con indice  $k$  o maggiore, mentre nel secondo figurano coordinate con indice  $k$  o minore. La fattorizzazione (13) è possibile in virtù dell'eq. (10), che segue dal fatto che la lagrangiana è funzione unicamente di posizione e velocità. Ora, si può eseguire l'integrazione su tutte le variabili  $x_i$  per  $i > k$  nel primo fattore: ne risulta una funzione di  $x_k$  (moltiplicata per il secondo fattore). Successivamente si può integrare su tutte le variabili  $x_i$  per  $i < k$  nel secondo fattore: ciò produce una funzione di  $x_k$ . Infine, si può integrare su  $x_k$ . Ne consegue che  $\varphi(R', R'')$  può essere scritta come l'integrale su  $x_k$  del prodotto di due fattori, che indicheremo con  $\chi^*(x_k, t)$  e  $\psi(x_k, t)$ :

$$\varphi(R', R'') = \int \chi^*(x, t) \psi(x, t) dx, \quad (14)$$

ove

$$\psi(x_k, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R'} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=-\infty}^{k-1} S(x_{k+1}, x_k) \right] \frac{dx_{k-1}}{A} \frac{dx_{k-2}}{A} \dots, \quad (15)$$

e

$$\chi^*(x_k, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R''} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=k}^{\infty} S(x_{i+1}, x_i) \right] \frac{1}{A} \frac{dx_{k+1}}{A} \frac{dx_{k+2}}{A} \dots \quad (16)$$

Il simbolo  $R'$  nell'integrale per  $\psi$  sta ad indicare che le coordinate sono integrate sulla regione  $R'$  e, per  $t_i$  fra  $t'$  e  $t$ , su tutto lo spazio. Analogamente, l'integrale per  $\chi^*$  è su  $R''$  e sull'intero spazio per le coordinate corrispondenti a tempi compresi fra  $t$  e  $t''$ . L'asterisco in  $\chi^*$  denota la coniugazione complessa, in quanto risulterà più conveniente definire l'eq. (16) come il complesso coniugato di un'altra quantità  $\chi$ .

La grandezza  $\psi$  dipende solo dalla regione  $R'$  precedente a  $t$ , ed è completamente definita se quella regione è nota. Essa non dipende in alcun modo da ciò che accadrà al sistema dopo il tempo  $t$ . Quest'ultima informazione è contenuta in  $\chi$ . Quindi con l'introduzione di  $\psi$  e  $\chi$  abbiamo separato la storia passata dal comportamento futuro del sistema. Ciò ci permette di parlare della relazione fra passato e futuro nel modo usuale. Esplicitamente, se una particella è stata in una regione  $R'$  dello spazio-tempo, si può dire che al tempo  $t$  essa si trova in un certo stato determinato soltanto dal suo passato e descritto dalla funzione d'onda  $\psi(x, t)$ . Questa funzione contiene tutta l'informazione necessaria al fine di predire probabilisticamente il comportamento futuro. Supponiamo infatti che in un'altra situazione la regione  $R'$  sia diversa – diciamo  $r'$  – ed inoltre che la lagrangiana differisca per tempi minori di  $t$ . D'altra parte, supponiamo però che  $\psi(x, t)$  data dall'eq. (15) sia uguale nei due casi. Allora l'eq. (14) ci dice che la probabilità di essere in  $R''$  è la stessa, sia per  $R'$  che per  $r'$ . Di conseguenza misure future non distingueranno se nel passato il sistema era in  $R'$  o in  $r'$ . Ne concludiamo che la funzione d'onda  $\psi(x, t)$  è sufficiente per specificare le proprietà necessarie al fine di determinare completamente il comportamento futuro.

In modo analogo la funzione  $\chi^*(x, t)$  caratterizza l'esperimento che viene effettuato sul sistema. Se una regione  $r''$  diversa da  $R''$  ed una lagrangiana diversa per tempi successivi a  $t$  dessero la stessa funzione  $\chi^*$  (vedi eq. (16)) in entrambe le situazioni, avremmo – secondo l'eq. (14) – che la probabilità di trovare il sistema in  $R''$  sarebbe uguale a quella di trovarlo in  $r''$  (indipendentemente dalla preparazione del sistema, specificata da  $\psi$ ). In altre parole, i due esperimenti  $R''$  e  $r''$  sono equivalenti, in quanto forniscono gli stessi risultati. Possiamo anche dire che questi esperimenti determinano con quale probabilità il sistema si trova nello stato  $\chi$ . Di fatto questa terminologia è imprecisa, in quanto il sistema si trova nello stato  $\psi$ . Naturalmente il motivo per cui possiamo associare uno stato ad un esperimento è che (per un esperimento ideale) risulta esserci un unico stato (la cui funzione d'onda è  $\chi(x, t)$ ) nel quale l'esperimento avviene con certezza.

Possiamo quindi dire: la probabilità che un sistema in uno stato  $\psi$  venga rivelato da un esperimento il cui stato caratteristico è  $\chi$  è data da

$$\left| \int \chi^*(x, t) \psi(x, t) dx \right|^2. \quad (17)$$

Ovviamente questi risultati sono in accordo con i principi della meccanica quantistica ordinaria. Essi sono una conseguenza del fatto che la lagrangiana è una funzione solamente di posizione, velocità e tempo.

## 6. L'EQUAZIONE D'ONDA

Al fine di completare la dimostrazione dell'equivalenza con la formulazione ordinaria dovremo mostrare che la funzione d'onda – definita nel paragrafo precedente dall'eq. (15) – soddisfa proprio l'equazione di Schrödinger. In realtà, riusciremo a fare questo solo nel caso in cui la lagrangiana  $L$  nell'eq. (11) è una forma quadratica inhomogenea delle velocità. Non si tratta però di una seria limitazione, dato che sono descritti di fatto tutti quei casi in cui l'equazione di Schrödinger è verificata sperimentalmente.

L'equazione d'onda fornisce l'evoluzione temporale della funzione d'onda. Ci possiamo aspettare di ottenere un'approssimazione notando che, per  $\epsilon$  finito, l'eq. (15) permette di sviluppare una semplice relazione ricorsiva. Consideriamo la forma dell'eq. (15) nel caso in cui volessimo calcolare  $\psi$  all'istante di tempo successivo:

$$\psi(x_{k+1}, t + \epsilon) = \int_{R'} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=-\infty}^k S(x_{i+1}, x_i) \right] \frac{dx_k}{A} \frac{dx_{k-1}}{A} \dots \quad (15')$$

Questa è simile all'eq. (15), a parte l'integrazione sull'ulteriore variabile  $x_k$  ed il nuovo termine nella somma che sta nell'esponenziale. Questo termine significa che l'integrale nell'eq. (15') è lo stesso integrale presente nell'eq. (15), a meno del fattore  $(1/A) \exp(i/\hbar) S(x_{k+1}, x_k)$ . Poiché esso non contiene alcuna delle variabili  $x_i$  per  $i$  minore di  $k$ , tutte le integrazioni su  $dx_i$  possono essere eseguite, ignorando la differenza con l'eq. (15). Tuttavia, in virtù dell'eq. (15), il risultato di tali integrazioni è semplicemente  $\psi(x_k, t)$ . Quindi dall'eq. (15') segue la relazione

$$\psi(x_{k+1}, t + \epsilon) = \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x_{k+1}, x_k) \right] \psi(x_k, t) dx_k / A. \quad (18)$$

Mostreremo su esempi semplici che questa relazione, con un'opportuna scelta di  $A$ , è equivalente all'equazione di Schrödinger. Di fatto, l'eq. (18) non è esatta, ma è valida solo nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , e noi assumeremo che essa sia corretta al prim'ordine in  $\epsilon$ . Osserviamo che è *sufficiente* che tale equazione sia corretta *solo* al prim'ordine in  $\epsilon$ , per  $\epsilon$  piccolo. Infatti, se consideriamo i fattori nell'eq. (15) che ci portano ad un intervallo di tempo finito  $T$ , il numero di tali fattori è  $T/\epsilon$ . Facendo un errore di ordine  $\epsilon^2$  in ognuno di essi, l'errore risultante sarà di ordine  $\epsilon^2(T/\epsilon) = \epsilon T$ , che si annulla nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Illustreremo quindi la relazione esistente fra l'eq. (18) e l'equazione di Schrödinger considerando il caso semplice di una particella in un potenziale unidimensionale  $V(x)$ . Prima di far questo vogliamo però discutere alcune approssimazioni al valore  $S(x_{i+1}, x_i)$  dato dall'eq. (11), che saranno sufficienti per l'espressione (18).

È difficile calcolare esattamente, partendo dalla meccanica classica, l'espressione di  $S(x_{i+1}, x_i)$  data dall'eq. (11). In realtà basta usare nell'eq. (18) un'espressione approssimata per  $S(x_{i+1}, x_i)$ , purché l'errore dovuto all'approssimazione sia di un ordine di grandezza più piccolo di  $\epsilon$ . Ci limitiamo al caso in cui la lagrangiana è una forma quadratica inhomogenea nelle velocità  $\dot{x}(t)$ . Come vedremo più avanti, i cammini più importanti sono quelli per cui  $x_{i+1} - x_i$  è dell'ordine di  $\sqrt{\epsilon}$ . In queste circostanze è sufficiente calcolare l'integrale nell'eq. (11) lungo il cammino classico corrispondente ad una particella *libera*<sup>11</sup>.

In *coordinate cartesiane*<sup>12</sup> la traiettoria di una particella libera è una linea retta, quindi l'integrale che figura nell'eq. (11) può essere calcolato lungo una retta. In questo caso è sufficiente sostituire l'integrale con la "regola del trapezio"

$$S(x_{i+1}, x_i) = \frac{\epsilon}{2} L \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, x_{i+1} \right) + \frac{\epsilon}{2} L \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, x_i \right) \quad (19)$$

oppure, se è più conveniente, con

$$S(x_{i+1}, x_i) = \epsilon L \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \right). \quad (20)$$

Queste equazioni non sono valide in un sistema arbitrario di coordinate, ad esempio sferiche. Si può usare un'approssimazione ancora più semplice nel

---

<sup>11</sup> Si assume che le "forze" entrino attraverso un potenziale scalare o vettore, e non in termini in cui compare il quadrato della velocità. Più in generale, per particella libera si intende quel sistema la cui lagrangiana è alterata per l'omissione di termini lineari nella velocità o indipendenti da essa.

<sup>12</sup> Più in generale, coordinate per cui i termini quadratici nelle velocità in  $L(x, \dot{x})$  appaiono con coefficienti costanti.



caso in cui non sia presente un potenziale vettore o altri termini lineari nella velocità:

$$S(x_{i+1}, x_i) = \epsilon L \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon}, x_{i+1} \right). \quad (21)$$

Quindi per il semplice esempio unidimensionale di una particella di massa  $m$  in un potenziale  $V(x)$  possiamo porre

$$S(x_{i+1}, x_i) = \frac{m\epsilon}{2} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{\epsilon} \right)^2 - \epsilon V(x_{i+1}). \quad (22)$$

In questo caso, l'eq. (18) diventa

$$\psi(x_{k+1}, t + \epsilon) = \int \exp \left\{ \frac{i\epsilon}{\hbar} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right)^2 - V(x_{k+1}) \right] \right\} \psi(x_k, t) dx_k / A. \quad (23)$$

Poniamo  $x_{k+1} = x$  e  $x_{k+1} - x_k = \xi$ , cosicché  $x_k = x - \xi$ . In tal modo l'eq. (23) diventa

$$\psi(x, t + \epsilon) = \int \exp \left[ \frac{im\xi^2}{2\epsilon\hbar} - \frac{i\epsilon V(x)}{\hbar} \right] \psi(x - \xi, t) \frac{d\xi}{A}. \quad (24)$$

L'integrazione in  $\xi$  converge se  $\psi(x, t)$  si annulla in modo sufficientemente rapido per grandi valori di  $x$  (certamente se  $\int \psi^*(x)\psi(x)dx = 1$ ). Essendo  $\epsilon$  molto piccolo, nell'integrazione su  $\xi$  l'esponenziale di  $im\xi^2/2\hbar\epsilon$  oscilla molto rapidamente tranne che nella regione intorno a  $\xi = 0$  ( $\xi$  dell'ordine di  $(\hbar\epsilon/m)^{\frac{1}{2}}$ ). Poiché la funzione  $\psi(x - \xi, t)$  ha una dipendenza da  $\xi$  piuttosto "liscia" (dato che  $\epsilon$  può essere scelto arbitrariamente piccolo), la regione in cui l'esponenziale oscilla rapidamente contribuirà molto poco, a causa della quasi completa cancellazione di contributi positivi e negativi. Quindi solo piccoli valori di  $\xi$  sono rilevanti nell'integrazione, il che permette di sviluppare  $\psi(x - \xi, t)$  in serie di Taylor. Abbiamo

$$\psi(x, t + \epsilon) = \exp \left( -\frac{i\epsilon V(x)}{\hbar} \right) \int \exp \left( \frac{im\xi^2}{2\hbar\epsilon} \right) \left[ \psi(x, t) - \xi \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \dots \right] d\xi / A. \quad (25)$$

Ora

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(im\xi^2/2\hbar\epsilon)d\xi &= (2\pi\hbar\epsilon/m)^{\frac{1}{2}}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(im\xi^2/2\hbar\epsilon)\xi d\xi &= 0, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(im\xi^2/2\hbar\epsilon)\xi^2 d\xi &= (\hbar\epsilon/m)(2\pi\hbar\epsilon/m)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{26}$$

mentre l'integrale contenente  $\xi^3$  è zero, in quanto il suo integrando è una funzione dispari (analogamente all'integrando che contiene  $\xi$ ). Inoltre l'integrale contenente  $\xi^4$  è di almeno un ordine  $\epsilon$  più piccolo di quelli considerati sopra<sup>13</sup>. Sviluppando il primo membro dell'eq. (25) al prim'ordine in  $\epsilon$ , tale equazione diventa

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) + \epsilon \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= \exp\left(-\frac{i\epsilon V(x)}{\hbar}\right) \frac{(2\pi\hbar\epsilon/m)^{\frac{1}{2}}}{A} \\
&\left[\psi(x, t) + \frac{\hbar\epsilon i}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \dots\right].
\end{aligned} \tag{27}$$

Affinché ambo i membri possano coincidere all'ordine *zero* in  $\epsilon$  è necessario che si abbia

$$A = (2\pi i \hbar \epsilon / m)^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

Sviluppiamo ora l'esponenziale contenente  $V(x)$ . Otteniamo

$$\begin{aligned}
\psi(x, t) + \epsilon \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} V(x)\right) \\
&\left(\psi(x, t) + \frac{\hbar\epsilon i}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}\right).
\end{aligned} \tag{29}$$

Cancellando  $\psi(x, t)$  da ambo i membri, uguagliando i termini al prim'ordine in  $\epsilon$  e moltiplicando per  $-\hbar/i$ , si ha

---

<sup>13</sup> In realtà, questi integrali sono oscillanti e quindi non ben definiti, però ad un simile inconveniente si può ovviare introducendo un fattore di convergenza. Nell'eq. (24) tale fattore è automaticamente fornito da  $\psi(x - \xi, t)$ . Se si desidera un procedimento più formale, si può, ad esempio, sostituire  $\hbar$  con  $\hbar(1 - i\delta)$  ove  $\delta$  è un numero piccolo positivo, prendendo successivamente il limite  $\delta \rightarrow 0$ .

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi + V(x)\psi, \quad (30)$$

che è l'equazione di Schrödinger per il problema considerato.

L'equazione per  $\chi^*$  può essere ottenuta nello stesso modo, ma aggiungendo un fattore, il tempo *decrese* di un intervallo, cioè  $\chi^*$  soddisfa un'equazione simile all'eq. (30) col segno del tempo invertito. Prendendo il complesso coniugato possiamo concludere che  $\chi$  soddisfa la stessa equazione di  $\psi$ , cioè un'esperimento può essere definito mediante il particolare stato  $\chi$  a cui esso corrisponde <sup>14</sup>.

Questo esempio mette in evidenza come la maggior parte del contributo a  $\psi(x_{k+1}, t + \epsilon)$  venga dai valori di  $x_k$  in  $\psi(x_k, t)$  che sono molto vicini a  $x_{k+1}$  (la cui distanza è dell'ordine  $\sqrt{\epsilon}$ ), cosicché l'equazione integrale (23) può essere sostituita da un'equazione differenziale nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Le "velocità"  $(x_{k+1} - x_k)/\epsilon$  che sono importanti sono molto grandi – essendo dell'ordine di  $(\hbar/m\epsilon)^{1/2}$  – e divergono per  $\epsilon \rightarrow 0$ . I corrispondenti cammini sono perciò continui ma non differenziabili. Essi sono del tipo familiare dallo studio del moto browniano.

Sono proprio queste grandi velocità che richiedono attenzione nell'approssimare  $S(x_{k+1}, x_k)$  data dall'eq. (11) <sup>15</sup>. La sostituzione di  $V(x_{k+1})$  con  $V(x_k)$  cambierebbe l'esponente nell'eq. (18) di  $i\epsilon[V(x_k) - V(x_{k+1})]/\hbar$ , che è di ordine  $\epsilon(x_{k+1} - x_k)$ : ciò introdurrebbe termini irrilevanti di ordine superiore in  $\epsilon$  nel secondo membro dell'eq. (29). È per questo motivo che le eq. (20) e (21) sono approssimazioni ugualmente buone di  $S(x_{k+1}, x_k)$  in assenza di potenziale vettore. Tuttavia un termine lineare nella velocità (dovuto al potenziale vettore) come  $A\dot{x}dt$  deve essere considerato con più attenzione. Un termine in  $S(x_{k+1}, x_k)$  come  $A(x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)$  differisce da  $A(x_k)(x_{k+1} - x_k)$  per un termine di ordine  $(x_{k+1} - x_k)^2$ , vale a dire di ordine  $\epsilon$ : questo termine cambierebbe la corrispondente equazione d'onda.

<sup>14</sup> Il dott. Hartland Snyder mi ha fatto osservare, in conversazioni private, la possibilità molto interessante che ci possa essere una generalizzazione della meccanica quantistica in cui gli stati misurati sperimentalmente non possano essere preparati. Non ci sarebbe cioè alcuno stato in cui il sistema ha un valore definito di (almeno) una osservabile. La classe di funzioni  $\chi$  non sarebbe identica alla classe di stati possibili  $\psi$ . Ciò avverrebbe se, ad esempio,  $\chi$  soddisfacesse ad una equazione diversa da quella per  $\psi$ .

<sup>15</sup> L'eq. (18) è in realtà esatta quando l'eq. (11) è usata per  $S(x_{i+1}, x_i)$  con  $\epsilon$  arbitrario, nei casi in cui il potenziale non contiene  $x$  a potenze superiori a due (particella libera, oscillatore armonico). È però necessario usare un valore più accurato per  $A$ . Si può definire  $A$  nel modo seguente. Si assuma che particelle classiche con  $k$  gradi di libertà partano da  $x_i, t_i$  con densità uniforme nello spazio dell'impulso. Si indichi con  $dp/p_0$  ( $p_0$  costante) il numero di particelle con una data componente dell'impulso nell'intervallo  $dp$ . Allora  $A = (2\pi i \hbar/p_0)^{k/2} \rho^{-1/2}$ , ove  $\rho$  è la densità nello spazio  $k$ -dimensionale delle coordinate  $x_{i+1}$  delle particelle considerate al tempo  $t_{i+1}$ .

Per tale motivo l'eq. (21) non è sufficientemente accurata come approssimazione dell'eq. (11), per cui si rende necessario usare l'espressione (20) (o (19) da cui la (20) differisce per termini superiori in  $\epsilon$ ). Se  $\mathbf{A}$  rappresenta il potenziale vettore e  $\mathbf{p} = (\hbar/i)\nabla$  l'operatore impulso, allora l'eq. (20) dà nell'operatore hamiltoniano un termine  $(1/2m)(\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A})$ , mentre l'eq. (21) fornisce  $(1/2m)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - (2e/c)\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + (e^2/c^2)\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$ . Queste due espressioni differiscono per  $(\hbar e/2imc)\nabla \cdot \mathbf{A}$ , che può non essere nullo. La questione è ancora più importante per i coefficienti di termini quadratici nelle velocità. In generale, le eq. (19) e (20) non sono rappresentazioni sufficientemente accurate dell'eq. (11) per questi termini. È quando i coefficienti sono costanti che le eq. (19) o (20) possono sostituire l'eq. (11). Se si usa un'espressione come l'eq. (19) ad esempio in coordinate sferiche, si ottiene un'equazione di Schrödinger in cui l'operatore hamiltoniano ha qualche operatore delle coordinate e dell'impulso nell'ordine sbagliato. L'eq. (11) allora risolve l'ambiguità nella usuale regola di sostituire  $p$  e  $q$  con operatori non commutanti  $(\hbar/i)(\partial/\partial q)$  e  $q$  nella hamiltoniana classica  $H(p, q)$ .

È chiaro che l'affermazione contenuta nell'eq. (11) è indipendente dal sistema di coordinate. Pertanto, al fine di trovare l'equazione d'onda corrispondente in un arbitrario sistema di coordinate, il procedimento più semplice consiste nel trovare dapprima l'equazione d'onda in coordinate cartesiane, effettuando poi il cambiamento di coordinate. È quindi sufficiente mostrare la relazione fra i nostri postulati e l'equazione di Schrödinger in coordinate rettangolari.

La derivazione data qui in una dimensione può essere estesa direttamente al caso di coordinate cartesiane tridimensionali per un numero arbitrario  $K$  di particelle interagenti fra loro ed in presenza di un campo magnetico descritto da un potenziale vettore. I termini dipendenti dal potenziale vettore richiedono di completare il quadrato nell'esponente nel modo usuale per gli integrali gaussiani. La variabile  $x$  deve essere sostituita dall'insieme  $x^{(1)}, \dots, x^{(3K)}$ , ove  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$  sono le coordinate della prima particella di massa  $m_1$ ,  $x^{(4)}, x^{(5)}, x^{(6)}$  della seconda di massa  $m_2$ , etc. Il simbolo  $dx$  viene sostituito da  $dx^{(1)} \dots dx^{(3K)}$  e l'integrazione su  $dx$  è sostituita da  $3K$  integrali. La costante  $A$  assume in questo caso il valore  $A = (2\pi i \hbar \epsilon / m_1)^{\frac{3}{2}} \dots (2\pi i \hbar \epsilon / m_{3K})^{\frac{3}{2}}$ . La lagrangiana è quella classica e l'equazione di Schrödinger che ne risulta sarà quella corrispondente alla hamiltoniana classica associata alla suddetta lagrangiana. Le equazioni in ogni altro sistema di coordinate possono essere ottenute mediante una trasformazione. Poiché quanto detto sopra comprende tutti i casi in cui l'equazione di Schrödinger è stata verificata sperimentalmente possiamo dire che i nostri postulati sono equivalenti all'usuale formulazione della meccanica quantistica non relativistica quando venga trascurato lo spin.

## 7. DISCUSSIONE DELL'EQUAZIONE D'ONDA

### *Il Limite Classico*

La dimostrazione dell'equivalenza fra la formulazione usuale della teoria quantistica e quella presentata qui è ora completa. Vorremmo però considerare in questo paragrafo alcune osservazioni concernenti l'eq. (18).

Questa equazione specifica l'evoluzione temporale della funzione d'onda durante un piccolo intervallo di tempo. Fisicamente, essa può essere interpretata come l'espressione del principio di Huygens per le onde di materia. In ottica geometrica, i raggi in un mezzo inhomogeneo soddisfano il principio di Fermat di minimo *tempo*. Possiamo enunciare il principio di Huygens dell'ottica ondulatoria nel modo seguente. Se l'ampiezza di un'onda è nota su una data superficie, in un punto vicino l'ampiezza può essere considerata come la somma di contributi provenienti da tutti i punti della superficie. Ogni contributo è sfasato di una quantità proporzionale al *tempo* che la luce impiegherebbe per andare dalla superficie al punto lungo il raggio di minimo *tempo* dell'ottica geometrica. Possiamo considerare l'eq. (22) in modo simile partendo dal primo principio di Hamilton di minima *azione* per la meccanica classica o "geometrica". Se l'ampiezza dell'onda  $\psi$  è nota su una data superficie – in particolare la "superficie" consistente di tutte le  $x$  al tempo  $t$  – il suo valore in un punto vicino, al tempo  $t + \epsilon$ , è la somma di contributi provenienti da tutti i punti della superficie al tempo  $t$ . Ogni contributo è sfasato di una quantità proporzionale all'*azione* richiesta per andare dalla superficie al punto considerato lungo il cammino di minima *azione* della meccanica classica<sup>16</sup>.

In realtà, il principio di Huygens dell'ottica non è corretto e va sostituito dalla modifica di Kirchoff, che richiede che l'ampiezza e la sua derivata siano note su superfici adiacenti. Ciò è conseguenza del fatto che l'equazione d'onda dell'ottica è del secondo ordine nel tempo. L'equazione d'onda della meccanica quantistica è invece del primo ordine nel tempo. Quindi il principio di Huygens è corretto per le onde di materia, nel qual caso l'azione sostituisce il tempo.

L'equazione (18) può anche essere confrontata con grandezze che appaiono nella formulazione usuale. Nell'approccio di Schrödinger l'evoluzione temporale della funzione d'onda è dato da

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{H} \psi \quad (31)$$

che ha come soluzione (per  $\epsilon$  arbitrario se  $\mathbf{H}$  è indipendente dal tempo)

$$\psi(x, t + \epsilon) = \exp(-i\epsilon \mathbf{H} / \hbar) \psi(x, t). \quad (32)$$

---

<sup>16</sup> A tale proposito si vedano le osservazioni molto interessanti di Schrödinger, Ann. d. Physik **79**, 489 (1926).

Pertanto l'eq. (18) esprime  $\exp(-i\epsilon\mathbf{H}/\hbar)$  come un'operatore integrale approssimato per  $\epsilon$  piccolo.

Secondo il punto di vista di Heisenberg si considera, ad esempio, la posizione al tempo  $t$  come un operatore  $x$ . La posizione  $x'$  ad un tempo successivo  $t + \epsilon$  può essere espressa in termini di quella al tempo  $t$  secondo l'equazione operatoriale

$$x' = \exp(i\epsilon\mathbf{H}/\hbar)x \exp(-i\epsilon\mathbf{H}/\hbar). \quad (33)$$

La teoria delle trasformazioni di Dirac ci permette di considerare la funzione d'onda al tempo  $t + \epsilon$ ,  $\psi(x', t + \epsilon)$ , come descrivente uno stato nella rappresentazione in cui  $x'$  è diagonale, mentre  $\psi(x, t)$  descrive lo stesso stato nella rappresentazione in cui  $x$  è diagonale. Queste funzioni d'onda sono quindi connesse dalla funzione di trasformazione  $(x'|x)_\epsilon$  che collega le due rappresentazioni:

$$\psi(x', t + \epsilon) = \int (x'|x)_\epsilon \psi(x, t) dx.$$

Di conseguenza segue dall'eq. (18) che per  $\epsilon$  piccolo possiamo porre

$$(x'|x)_\epsilon = (1/A) \exp(iS(x', x)/\hbar) \quad (34)$$

ove  $S(x', x)$  è definita dall'eq. (11).

La stretta analogia fra  $(x'|x)_\epsilon$  e la grandezza  $\exp(iS(x', x)/\hbar)$  è stata sottolineata ripetutamente da Dirac <sup>1</sup>. Ora vediamo che, con sufficiente approssimazione, le due grandezze possono essere considerate proporzionali. Le osservazioni di Dirac sono state il punto di partenza del presente lavoro. Gli argomenti di Dirac riguardanti il limite classico  $\hbar \rightarrow 0$  sono molto belli, e forse posso essere scusato se li riporto qui brevemente.

Notiamo innanzi tutto che la funzione d'onda in  $x''$  al tempo  $t''$  può essere ottenuta da quella in  $x'$  al tempo  $t'$  come

$$\begin{aligned} \psi(x'', t'') &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \cdots \int \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{j-1} S(x_{i+1}, x_i) \right] \cdot \\ &\psi(x', t') \frac{dx_0}{A} \frac{dx_1}{A} \cdots \frac{dx_{j-1}}{A}, \end{aligned} \quad (35)$$

ove poniamo  $x_0 \equiv x'$ ,  $x_j \equiv x''$  e  $j\epsilon \equiv t'' - t'$  (assumiamo che fra i tempi  $t'$  e  $t''$  non vi sia alcuna restrizione sulla regione d'integrazione). Ciò può essere visto sia applicando ripetutamente l'eq. (18) che direttamente dall'eq. (15). Ci chiediamo ora quali valori delle coordinate contribuiscano maggiormente

all'integrale per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Questi saranno i valori osservabili sperimentalmente con maggiore probabilità, e quindi determineranno il cammino classico per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Se  $\hbar$  è molto piccolo, l'argomento dell'esponenziale sarà una funzione rapidamente variabile di ognuno dei suoi argomenti  $x_i$ . Al variare delle  $x_i$ , i contributi positivi e negativi all'integrale provenienti dall'esponenziale si cancellano quasi completamente. La regione delle  $x_i$  che contribuisce maggiormente è quella in cui l'argomento dell'esponente varia con  $x_i$  il meno rapidamente possibile (metodo della fase stazionaria). Indichiamo con  $S$  la somma nell'esponente

$$S = \sum_{i=0}^{j-1} S(x_{i+1}, x_i). \quad (36)$$

Allora l'orbita classica passa approssimativamente per quei punti  $x_i$  nei quali  $S$  varia di poco al variare delle  $x_i$ : nel limite  $\hbar \rightarrow 0$  la traiettoria classica passa per i punti in cui  $S$  non varia per una piccola variazione delle  $x_i$ . Ciò significa che l'orbita classica passa per i punti in cui  $\partial S / \partial x_i = 0$ , per ogni  $x_i$ . Prendendo il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , l'eq. (36) diventa (in virtù dell'eq. (11))

$$S = \int_{t'}^{t''} L(x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (37)$$

Vediamo quindi che il cammino classico è quella traiettoria deformando la quale non si induce – al prim'ordine – alcuna variazione in  $S$ . Questo è il principio di Hamilton, che porta direttamente alle equazioni di Lagrange.

## 8. ALGEBRA DEGLI OPERATORI

### *Elementi di matrice*

Data la funzione d'onda e l'equazione di Schrödinger, è possibile naturalmente sviluppare l'intero formalismo degli operatori o dell'algebra delle matrici. È tuttavia più interessante esprimere questi concetti in un linguaggio differente, più simile a quello usato nella formulazione dei nostri postulati. Ciò non porta ad una più profonda comprensione dell'algebra degli operatori, in quanto i nostri risultati saranno una semplice trascrizione delle equazioni operatoriali in una notazione più pesante. D'altra parte, il nuovo formalismo è molto utile in certe applicazioni descritte nell'introduzione. La forma delle equazioni permette inoltre un'estensione naturale ad una classe di operatori più vasta di quella usualmente considerata (ad esempio operatori che si riferiscono a due o più tempi diversi). Le formule che svilupperemo giocheranno un ruolo

importante nel caso in cui sia possibile una generalizzazione ad una classe più vasta di integrali d'azione.

Discuteremo questi argomenti nei tre paragrafi successivi, mentre il presente paragrafo contiene principalmente alcune definizioni. Introduciamo una grandezza che chiamiamo elemento di transizione tra due stati. Esso è essenzialmente un elemento di matrice. Ma invece di essere un elemento di matrice fra due stati  $\psi$  e  $\chi$  corrispondenti allo *stesso* tempo, i due stati si riferiscono a tempi diversi. Nel paragrafo successivo otterremo una relazione fondamentale fra gli elementi di transizione, da cui possono venir dedotte le usuali relazioni di commutazione fra coordinate ed impulsi. La stessa relazione fornisce anche le equazioni newtoniane del moto in forma matriciale. Discuteremo infine nel paragrafo 10 la relazione fra hamiltoniana ed operatore di traslazione temporale.

Cominciamo col definire un elemento di transizione in termini della probabilità di transizione fra uno stato ed un altro. Più precisamente, supponiamo di avere una situazione simile a quella considerata nella derivazione dell'eq. (17). La regione  $R$  consiste di una regione  $R'$  precedente a  $t'$ , tutto lo spazio fra  $t'$  e  $t''$  e la regione  $R''$  successiva a  $t''$ . Studieremo la probabilità che un sistema nella regione  $R'$  sia trovato successivamente nella regione  $R''$ . Questa è data dall'eq. (17). Discuteremo in questo paragrafo come essa varia al variare della forma della lagrangiana fra  $t'$  e  $t''$ . Nel paragrafo 10 studieremo invece come essa cambia al variare della preparazione  $R'$  o dell'esperimento  $R''$ .

Lo stato al tempo  $t'$  è definito completamente dalla preparazione  $R'$ . Esso può essere specificato dalla funzione d'onda  $\psi(x', t')$  ottenuta dall'eq. (15) considerando gli integrali estesi fino al tempo  $t'$ . Analogamente, lo stato caratteristico dell'esperimento (regione  $R''$ ) può essere definito da una funzione  $\chi(x'', t'')$  ottenuta dall'eq. (16) con integrali calcolati a partire dal tempo  $t''$ . La funzione d'onda  $\psi(x'', t'')$  può ovviamente essere ottenuta anche applicando l'eq. (15) o da  $\psi(x', t')$  mediante l'eq. (35). Secondo l'eq. (17) con  $t'$  al posto di  $t$ , la probabilità che il sistema venga osservato nello stato  $\chi$  se preparato in  $\psi$  è il quadrato di ciò che chiamiamo ampiezza di transizione  $\int \chi^*(x'', t'')\psi(x'', t'')dx''$ . Desideriamo esprimere questa grandezza in termini di  $\chi$  al tempo  $t''$  e di  $\psi$  al tempo  $t'$ : possiamo farlo grazie all'eq. (35). Quindi la probabilità che un sistema preparato nello stato  $\psi_{t'}$  al tempo  $t'$  sia trovato ad un tempo  $t''$  nello stato  $\chi_{t''}$  è il quadrato dell'ampiezza di transizione

$$\langle \chi_{t''} | 1 | \psi_{t'} \rangle_S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \cdots \int \chi^*(x'', t'') \exp(iS/\hbar) \psi(x', t') \cdot \frac{dx_0}{A} \cdots \frac{dx_{j-1}}{A} dx_j, \quad (38)$$

ove si è fatto uso dell'abbreviazione (36). Nel linguaggio della meccanica quantistica ordinaria, nel caso in cui la hamiltoniana  $\mathbf{H}$  sia costante, si ha



$\psi(x, t'') = \exp[-i(t'' - t')\mathbf{H}/\hbar]\psi(x, t')$ , cosicché l'eq. (38) è l'elemento di matrice di  $\exp[-i(t'' - t')\mathbf{H}/\hbar]$  fra gli stati  $\chi_{t''}$  e  $\psi_{t'}$ .

Se  $F$  è un'arbitraria funzione delle coordinate  $x_i$  per  $t' < t < t''$ , definiamo l'elemento di transizione di  $F$  fra gli stati  $\psi$  al tempo  $t'$  e  $\chi$  al tempo  $t''$  per l'azione  $S$  ( $x'' \equiv x_j, x' \equiv x_0$ ) come

$$\begin{aligned} \langle \chi_{t''} | F | \psi_{t'} \rangle_S &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \cdots \int \chi^*(x'', t'') F(x_0, x_1, \dots, x_j) \cdot \\ &\exp \left[ \frac{i}{\hbar} \sum_{i=0}^{j-1} S(x_{i+1}, x_i) \right] \psi(x', t') \frac{dx_0}{A} \cdots \frac{dx_{j-1}}{A} dx_j. \end{aligned} \quad (39)$$

Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$   $F$  diventa un funzionale del cammino  $x(t)$ .

Vedremo ora perché tali quantità sono importanti. Sarà più facile capirlo se ci soffermiamo un momento a scoprire le corrispondenti grandezze nella formulazione convenzionale. Supponiamo che  $F$  sia data semplicemente da  $x_k$ , dove  $k$  corrisponde ad un certo tempo  $t = t_k$ . Allora nel secondo membro dell'eq. (39) gli integrali da  $x_0$  a  $x_{k-1}$  possono essere calcolati, ottenendo  $\psi(x_k, t)$  o  $\exp[-i(t - t')\mathbf{H}/\hbar]\psi_{t'}$ . Analogamente, gli integrali su  $x_i$  per  $j \geq i > k$  danno  $\chi^*(x_k, t)$  o  $\{\exp[-i(t'' - t)\mathbf{H}/\hbar]\chi_{t''}\}^*$ . Quindi l'elemento di transizione di  $x_k$

$$\begin{aligned} \langle \chi_{t''} | F | \psi_{t'} \rangle_S &= \int \chi_{t''}^* e^{-(i/\hbar)\mathbf{H}(t''-t)} x e^{-(i/\hbar)\mathbf{H}(t-t')} \psi_{t'} dx = \\ &\int \chi^*(x, t) x \psi(x, t) dx \end{aligned} \quad (40)$$

è l'elemento di matrice di  $x$  al tempo  $t = t_k$  fra lo stato al tempo  $t$  che nasce da  $\psi_{t'}$  al tempo  $t'$  e lo stato al tempo  $t$  che evolverà in  $\chi_{t''}$  al tempo  $t''$ . È pertanto l'elemento di matrice di  $x(t)$  fra questi due stati.

Procedendo in modo analogo si vede (usando l'eq. (39) con  $F = x_{k+1}$ ) che l'elemento di transizione di  $x_{k+1}$  è l'elemento di matrice di  $x(t + \epsilon)$ . L'elemento di transizione di  $F = (x_{k+1} - x_k)/\epsilon$  è l'elemento di matrice di  $(x(t + \epsilon) - x(t))/\epsilon$  o di  $i(\mathbf{H}x - x\mathbf{H})/\hbar$ , come è mostrato dall'eq. (40): lo possiamo chiamare elemento di matrice della velocità.

Consideriamo un secondo problema che differisce dal primo, ad esempio, in quanto il potenziale è aumentato di una piccola quantità  $U(x, t)$ . Allora nel nuovo problema la grandezza che sostituisce  $S$  è  $S' = S + \sum_i \epsilon U(x_i, t_i)$ . Sostituendola nell'eq. (38) si ha

$$\langle \chi_{t''} | 1 | \psi_{t'} \rangle_{S'} = \left\langle \chi_{t''} \left| \exp \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{i=1}^j U(x_i, t_i) \right| \psi_{t'} \right\rangle_S. \quad (41)$$

Quindi elementi di transizione come quello nell'eq. (39) sono importanti ogniqualvolta  $F$  può nascere in qualche modo da una variazione  $\delta S$  di un funzionale d'azione. Chiameremo funzionali osservabili quei funzionali  $F$  che possono essere definiti (anche se indirettamente) in termini di variazioni indotte da possibili cambiamenti dell'azione. La condizione affinché un funzionale sia osservabile è abbastanza simile a quella che un operatore deve soddisfare affinché sia hermitiano. I funzionali osservabili formano una classe ristretta, in quanto l'azione deve restare una funzione quadratica delle velocità. Da un funzionale osservabile altri possono essere dedotti come, ad esempio,

$$\langle \chi_{t''} | 1 | \psi_{t'} \rangle_{S'} = \left\langle \chi_{t''} \left| F \exp \frac{i\epsilon}{\hbar} \sum_{i=1}^j U(x_i, t_i) \right| \psi_{t'} \right\rangle_S \quad (42)$$

che segue dall'eq. (39).

Incidentalmente, l'eq. (41) porta direttamente ad un'importante formula perturbativa. Se l'effetto di  $U$  è piccolo, l'esponenziale può essere sviluppato al prim'ordine in  $U$  e troviamo

$$\langle \chi_{t''} | 1 | \psi_{t'} \rangle_{S'} = \langle \chi_{t''} | 1 | \psi_{t'} \rangle_S + \frac{i}{\hbar} \langle \chi_{t''} | \sum_i \epsilon U(x_i, t_i) | \psi_{t'} \rangle. \quad (43)$$

Di particolare importanza è il caso in cui  $\chi_{t''}$  è uno stato in cui  $\psi_{t'}$  non potrebbe venir trovato, se non fosse perché la perturbazione  $U$  è presente (cioè  $\langle \chi_{t''} | 1 | \psi_{t'} \rangle_S = 0$ ). Allora

$$\frac{1}{\hbar^2} \left| \left\langle \chi_{t''} \left| \sum_i \epsilon U(x_i, t_i) \right| \psi_{t'} \right\rangle \right|^2 \quad (44)$$

è la probabilità della transizione indotta dalla perturbazione (al prim'ordine nella perturbazione). Nella notazione usuale si ha

$$\begin{aligned} & \left\langle \chi_{t''} \left| \sum_i \epsilon U(x_i, t_i) \right| \psi_{t'} \right\rangle_S = \\ & \int \left[ \int \chi_{t''}^* e^{-(i/\hbar)\mathbf{H}(t''-t)} \mathbf{U} e^{-(i/\hbar)\mathbf{H}(t-t')} \psi_{t'} dx \right] dt \end{aligned}$$

cosicché l'eq. (44) si riduce all'espressione usuale<sup>17</sup> per la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo.

---

<sup>17</sup> P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (The Clarendon Press, Oxford, 1935), seconda edizione, capitolo 47, eq. (20).

## 9. EQUAZIONI DI NEWTON

### *Le relazioni di commutazione*

In questo paragrafo scopriamo che funzionali diversi possono dare risultati identici quando considerati fra un coppia di stati. Questa equivalenza fra funzionali è l'analogo, nel nuovo linguaggio, delle equazioni operatoriali.

Se  $F$  dipende da più coordinate possiamo naturalmente definire un nuovo funzionale  $\partial F/\partial x_k$  derivando rispetto ad una delle sue variabili, ad esempio  $x_k$  ( $0 < k < j$ ). Calcolando  $\langle \chi_{t''} | \partial F/\partial x_k | \psi_{t'} \rangle_S$  mediante l'eq. (39), l'integrale nel secondo membro conterrà  $\partial F/\partial x_k$ . L'unico altro posto in cui compare la variabile  $x_k$  è in  $S$ . Quindi l'integrazione su  $x_k$  può essere effettuata per parti. La parte integrata si annulla (assumendo che la funzione d'onda si annulli all'infinito) e nell'integrale figura  $-F(\partial/\partial x_k) \exp(iS/\hbar)$ . Ora  $(\partial/\partial x_k) \exp(iS/\hbar) = (i/\hbar)(\partial S/\partial x_k) \exp(iS/\hbar)$ , quindi il secondo membro rappresenta l'elemento di transizione di  $-(i/\hbar)F(\partial S/\partial x_k)$ , cioè

$$\left\langle \chi_{t''} \left| \frac{\partial F}{\partial x_k} \right| \psi_{t'} \right\rangle_S = -\frac{i}{\hbar} \left\langle \chi_{t''} \left| F \frac{\partial S}{\partial x_k} \right| \psi_{t'} \right\rangle_S. \quad (45)$$

Questa relazione è molto importante in quanto mostra che due diversi funzionali possono dare lo stesso risultato per gli elementi di transizione fra un'arbitraria coppia di stati. Diremo che essi sono equivalenti, e rappresenteremo simbolicamente tale relazione come

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial F}{\partial x_k} \overset{S}{\longleftrightarrow} F \frac{\partial S}{\partial x_k} \quad (46)$$

ove il simbolo  $\overset{S}{\longleftrightarrow}$  sottolinea il fatto che funzionali equivalenti secondo un'azione possono non essere equivalenti per un'altra azione. Le grandezze nell'eq. (46) non devono necessariamente essere osservabili. Usando l'eq. (36) si può scrivere

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial F}{\partial x_k} \overset{S}{\longleftrightarrow} F \left[ \frac{\partial S(x_{k+1}, x_k)}{\partial x_k} + \frac{\partial S(x_k, x_{k-1})}{\partial x_k} \right]. \quad (47)$$

Questa equazione è corretta agli ordini zero e primo in  $\epsilon$ , ed ha come conseguenza le relazioni di commutazione fra coordinate ed impulso e le equazioni newtoniane del moto in forma matriciale.

Nel caso del semplice problema unidimensionale trattato in precedenza,  $S(x_{i+1}, x_i)$  è data dall'espressione (15), cosicché abbiamo

$$\partial S(x_{k+1}, x_k)/\partial x_k = -m(x_{k+1} - x_k)/\epsilon$$

e

$$\partial S(x_k, x_{k-1})/\partial x_k = +m(x_k - x_{k-1})/\epsilon - \epsilon V'(x_k),$$

ove abbiamo scritto  $V'(x)$  per indicare la derivata del potenziale (forza). Allora l'eq. (47) diventa

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial F}{\partial x_k} \xleftrightarrow{S} F \left[ -m \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} - \frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} \right) - \epsilon V'(x) \right]. \quad (48)$$

Se  $F$  non dipende dalla variabile  $x_k$ , l'eq. (48) fornisce le equazioni newtoniane del moto. Ad esempio, se  $F$  è costante (uguale ad uno), l'eq. (48) porta (dividendo per  $\epsilon$ ) a

$$0 \xleftrightarrow{S} -\frac{m}{\epsilon} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} - \frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} \right) - V'(x_k).$$

Pertanto l'elemento di transizione del prodotto della massa per l'accelerazione  $[(x_{k+1} - x_k)/\epsilon - (x_k - x_{k-1})/\epsilon]/\epsilon$  fra due stati arbitrari è uguale all'elemento di transizione della forza  $-V'(x)$  fra gli stessi stati. Questa è l'espressione matriciale della legge di Newton che vale in meccanica quantistica.

Cosa accade se  $F$  dipende da  $x_k$ ? Ad esempio, sia  $F = x_k$ . Allora l'eq. (48) fornisce (essendo  $\partial F/\partial x_k = 1$ )

$$-\frac{\hbar}{i} \xleftrightarrow{S} x_k \left[ -m \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} - \frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} \right) - \epsilon V'(x_k) \right]$$

ossia, trascurando i termini d'ordine  $\epsilon$

$$m \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right) x_k - m \left( \frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} \right) x_k \xleftrightarrow{S} \frac{\hbar}{i}. \quad (49)$$

Al fine di tradurre un'equazione come la (49) nella notazione usuale, abbiamo bisogno di conoscere quale matrice corrisponde a grandezze del tipo  $x_k x_{k+1}$ . Dallo studio dell'eq. (39) è chiaro che se  $F$  viene scelta, ad esempio, uguale a  $f(x_k)g(x_{k+1})$ , il corrispondente operatore nell'eq. (40) è

$$e^{-(i/\hbar)(t''-t-\epsilon)\mathbf{H}} g(\mathbf{x}) e^{-(i/\hbar)\epsilon\mathbf{H}} f(\mathbf{x}) e^{-(i/\hbar)(t-t')\mathbf{H}},$$

con l'elemento di matrice preso fra gli stati  $\chi_{t''}$  e  $\psi_{t'}$ . Gli operatori che corrispondono a funzioni di  $x_{k+1}$  appaiono a sinistra di quelli corrispondenti

a funzioni di  $x_k$ , cioè l'ordine dei termini in un prodotto di operatori corrisponde ad un ordine temporale dei corrispondenti fattori in un funzionale. Così se il funzionale è scritto in modo tale che in ogni termine i fattori corrispondenti a tempi successivi appaiano alla sinistra dei fattori corrispondenti a tempi precedenti, gli operatori associati possono essere scritti immediatamente mantenendo lo stesso ordinamento che si ha nel funzionale<sup>18</sup>. È ovvio che in un funzionale l'ordine dei fattori è irrilevante ma facilita la trascrizione nella notazione operatoriale convenzionale. Al fine di scrivere l'eq. (49) in modo tale che la traduzione operatoriale sia banale è necessario invertire l'ordine dei fattori nel secondo termine a primo membro. Vediamo perciò che tale equazione corrisponde a

$$px - xp = \hbar/i$$

in cui  $p = m\dot{x}$ .

La relazione fra funzionali ed operatori corrispondenti è stata definita in termini dell'ordine temporale dei fattori. È opportuno però sottolineare il fatto che questa regola deve essere applicata con particolare attenzione ogniqualvolta si considerano grandezze che contengono velocità o derivate d'ordine più elevato. Di fatto, il corretto funzionale che rappresenta l'operatore  $(\dot{x})^2$  è  $(x_{k+1} - x_k)/\epsilon \cdot (x_k - x_{k-1})/\epsilon$  e non  $[(x_{k+1} - x_k)/\epsilon]^2$ . La seconda espressione diverge come  $1/\epsilon$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ciò si può vedere sostituendo il secondo termine dell'eq. (49) col suo valore calcolato ad un istante spostato di  $\epsilon$  nel futuro,  $x_{k+1} \cdot m(x_{k+1} - x_k)/\epsilon$ . Tale procedimento non cambia l'equazione all'ordine zero in  $\epsilon$ . Allora otteniamo (dividendo per  $\epsilon$ )

$$\left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon}\right)^2 \xleftrightarrow{S} \frac{\hbar}{im\epsilon}. \quad (50)$$

Riotteniamo il risultato già visto, che la radice quadratica media della “velocità”  $(x_{k+1} - x_k)/\epsilon$  fra due posizioni successive del cammino è dell'ordine  $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$ .

Non avrà quindi senso scrivere il funzionale dell'energia cinetica nella forma

$$\frac{1}{2}m[(x_{k+1} - x_k)/\epsilon]^2 \quad (51)$$

in quanto tale grandezza è infinita per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Di fatto, non si tratta di un funzionale osservabile.

È possibile ottenere l'energia cinetica come un funzionale osservabile considerando la variazione al prim'ordine nell'ampiezza di transizione dovuta

---

<sup>18</sup> Dirac ha studiato anche operatori che contengono grandezze che si riferiscono a tempi diversi. Si veda la nota 2.

ad un cambiamento della massa della particella. Si sostituisca  $m$  con  $m(1 + \delta)$  per un piccolo tempo  $\epsilon$ , intorno all'istante  $t_k$ . La variazione indotta nell'azione è  $\frac{1}{2}\delta\epsilon m[(x_{k+1} - x_k)/\epsilon]^2$ , la cui derivata dà un'espressione come quella nell'eq. (51). Ora, la variazione di  $m$  altera sia la costante di normalizzazione  $1/A$  relativa a  $dx_k$  che l'azione. La costante varia da  $(2\pi \hbar\epsilon i/m)^{-\frac{1}{2}}$  a  $[2\pi \hbar\epsilon i/m(1 + \delta)]^{-\frac{1}{2}}$  o, al prim'ordine in  $\delta$ ,  $\frac{1}{2}\delta(2\pi \hbar\epsilon i/m)^{-\frac{1}{2}}$ . L'effetto totale della variazione della massa nell'eq. (38) al prim'ordine in  $\delta$  è

$$\left\langle \chi_{t''} \left| \frac{1}{2}\delta\epsilon i m [(x_{k+1} - x_k)/\epsilon]^2 / \hbar + \frac{1}{2}\delta \right| \psi_{t'} \right\rangle.$$

Ci aspettiamo che la variazione di ordine  $\delta$  che dura per un tempo  $\epsilon$  sia di ordine  $\delta\epsilon$ . Quindi, dividendo per  $\delta\epsilon i / \hbar$ , possiamo definire il funzionale energia cinetica come

$$E.C. = \frac{1}{2}m[(x_{k+1} - x_k)/\epsilon]^2 + \hbar/2\epsilon i. \quad (52)$$

Questo è finito per  $\epsilon \rightarrow 0$ , grazie all'eq. (50). Usando l'equazione che si ottiene inserendo  $F = m(x_{k+1} - x_k)/\epsilon$  nell'eq. (48) si può anche mostrare che l'espressione (52) è uguale (al prim'ordine in  $\epsilon$ ) a

$$E.C. = \frac{1}{2}m \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{\epsilon} \right) \left( \frac{x_k - x_{k-1}}{\epsilon} \right). \quad (53)$$

Si vede che il modo più semplice per ottenere funzionali osservabili contenenti potenze della velocità è di sostituire questa potenza col prodotto delle velocità, calcolando ogni fattore a tempi leggermente diversi.

## 10. LA HAMILTONIANA

### *L'impulso*

L'operatore hamiltoniano ha un'importanza centrale nell'usuale formulazione della meccanica quantistica. In questo paragrafo studieremo il funzionale corrispondente a questo operatore. Potremmo definire immediatamente il funzionale hamiltoniano sommando il funzionale dell'energia cinetica (52) o (53) all'energia potenziale. Tuttavia questo metodo è artificiale e non mostra l'importante relazione esistente fra hamiltoniana e tempo. Definiremo il funzionale hamiltoniano mediante la variazione indotta in uno stato da una traslazione temporale.

A tal fine è necessario osservare che la suddivisione del tempo in intervalli *uguali* non è necessaria. Chiaramente ogni suddivisione in istanti  $t_i$  è soddisfacente; i limiti vanno presi richiedendo che l'intervallo maggiore  $t_{i+1} - t_i$  vada a zero. L'azione totale deve ora venire rappresentata dalla somma

$$S = \sum_i S(x_{i+1}, t_{i+1}; x_i, t_i) \quad (54)$$

ove

$$S(x_{i+1}, t_{i+1}; x_i, t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(x(t), \dot{x}(t)) dt, \quad (55)$$

in cui l'integrale è calcolato lungo il cammino classico che congiunge  $x_i$  al tempo  $t_i$  con  $x_{i+1}$  al tempo  $t_{i+1}$ . Per il nostro esempio unidimensionale si ha con sufficiente precisione

$$S(x_{i+1}, t_{i+1}; x_i, t_i) = \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} \right)^2 - V(x_{i+1}) \right] (t_{i+1} - t_i) \quad (56)$$

e la corrispondente costante di normalizzazione per l'integrazione su  $dx_i$  è  $A = [2\pi \hbar i (t_{i+1} - t_i) / m]^{-\frac{1}{2}}$ .

Possiamo studiare adesso la relazione esistente fra hamiltoniana ed evoluzione temporale. Si consideri uno stato  $\psi(t)$  definito in una regione spaziotemporale  $R'$ . Si immagini ora di considerare un altro stato al tempo  $t$ ,  $\psi_\delta(t)$ , definito in un'altra regione  $R'_\delta$ . Supponiamo che la regione  $R'_\delta$  sia esattamente la stessa di  $R'$  tranne che precede  $R'$  di un tempo  $\delta$ , cioè è spostata in blocco nel passato di un tempo  $\delta$ . L'apparato associato a  $R'_\delta$  per la preparazione dello stato è identico a quello associato a  $R'$ , ma opera ad un tempo precedente dell'intervallo  $\delta$ . Se  $L$  dipende esplicitamente dal tempo, anch'essa dev'essere traslata temporalmente, cioè lo stato  $\psi_\delta$  è ottenuto da  $L$  usata per lo stato  $\psi$ , con la sola differenza che il tempo  $t$  in  $L_\delta$  è sostituito con  $t + \delta$ . Ci chiediamo ora come lo stato  $\psi_\delta$  differisca da  $\psi$ . In ogni misurazione la probabilità di trovare il sistema in una regione prefissata  $R''$  è diversa per  $R'$  e  $R'_\delta$ . Si consideri la variazione nell'elemento di transizione  $\langle \chi | 1 | \psi_\delta \rangle_{S_\delta}$  indotta dalla traslazione temporale  $\delta$ . Possiamo considerare quest'ultima come realizzata diminuendo tutti i valori di  $t_i$  di  $\delta$  per  $i \leq k$ , lasciando inalterati i valori di  $t_i$  per  $i > k$ , essendo  $t$  nell'intervallo  $t_k, t_{k+1}$ <sup>19</sup>. Questa variazione non avrà alcun effetto

<sup>19</sup> Dal punto di vista del rigore matematico, se  $\delta$  è finito, il limite  $\epsilon \rightarrow 0$  è problematico in

su  $S(x_{i+1}, t_{i+1}; x_i, t_i)$  definita dall'eq. (55) fintanto che sia  $t_{i+1}$  che  $t_i$  vengono variati della stessa quantità. D'altro lato,  $S(x_{k+1}, t_{k+1}; x_k, t_k)$  diventa  $S(x_{k+1}, t_{k+1}; x_k, t_k - \delta)$ , mentre la costante d'integrazione  $1/A$  relativa a  $dx_k$  diventa  $[2\pi \hbar i(t_{k+1} - t_k + \delta)/m]^{-\frac{1}{2}}$ . Al prim'ordine in  $\delta$ , l'effetto di queste variazioni sull'elemento di transizione è dato da

$$\langle \chi | 1 | \psi \rangle_S - \langle \chi | 1 | \psi_\delta \rangle_{S_\delta} = \frac{i\delta}{\hbar} \langle \chi | H_k | \psi \rangle_S \quad (57)$$

in cui la funzione hamiltoniana  $H_k$  è definita come

$$H_k = \frac{\partial S(x_{k+1}, t_{k+1}; x_k, t_k)}{\partial t_k} + \frac{\hbar}{2i(t_{k+1} - t_k)}. \quad (58)$$

L'ultimo termine è indotto dalla variazione di  $1/A$  e mantiene  $H_k$  finita per  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ad esempio, per l'espressione (56) si ha

$$H_k = \frac{m}{2} \left( \frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k} \right)^2 + \frac{\hbar}{2i(t_{k+1} - t_k)} + V(x_{k+1})$$

che è proprio la somma del funzionale dell'energia cinetica (52) e di quello dell'energia potenziale  $V(x_{k+1})$ .

La funzione d'onda  $\psi_\delta(x, t)$  rappresenta naturalmente lo stato  $\psi(x, t)$  traslato temporalmente di  $\delta$ , cioè  $\psi(x, t + \delta)$ . Quindi l'eq. (57) è strettamente connessa con l'equazione operatoriale (31).

Si può anche considerare variazioni dovute ad una traslazione temporale dello stato finale  $\chi$ . Naturalmente, in questo caso non si ottiene alcun risultato nuovo, in quanto è solo la traslazione relativa fra  $\chi$  e  $\psi$  che conta. Si ottiene un'espressione alternativa

$$H_k = -\frac{\partial S(x_{k+1}, t_{k+1}; x_k, t_k)}{\partial t_{k+1}} + \frac{\hbar}{2i(t_{k+1} - t_k)} \quad (59)$$

che differisce dalla (58) solo per termini di ordine  $\epsilon$ .

La rapidità di variazione temporale di un funzionale può essere calcolata considerando l'effetto combinato di una traslazione temporale sia dello stato iniziale che di quello finale. Ciò equivale a calcolare l'elemento di transizione del funzionale riferito ad un tempo successivo. Il risultato è l'analogo dell'equazione operatoriale

---

quanto, ad es., l'intervallo  $t_{k+1} - t_k$  è mantenuto finito. A ciò si può ovviare assumendo che  $\delta$  dipenda dal tempo, e che sia "acceso" lentamente prima di  $t = t_k$  e "spento" lentamente dopo  $t = t_k$ . Tenendo fissa la dipendenza temporale di  $\delta$ , si effettui il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ; quindi si cerchi la variazione (al prim'ordine) per  $\delta \rightarrow 0$ . Il risultato è essenzialmente identico a quello ottenuto col procedimento più semplice usato sopra.



$$\frac{\hbar}{i} \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{f}\mathbf{H}.$$

Il funzionale dell'impulso  $p_k$  può essere definito in modo analogo considerando le variazioni indotte dalle traslazioni spaziali:

$$\langle \chi | 1 | \psi \rangle_S - \langle \chi | 1 | \psi_\Delta \rangle_{S_\Delta} = \frac{i\Delta}{\hbar} \langle \chi | p_k | \psi \rangle_S.$$

La preparazione dello stato  $\psi_\Delta$  è associata ad una regione  $R'_\Delta$  che è identica alla regione  $R$ , tranne che per il fatto di essere traslata spazialmente di una distanza  $\Delta$ . (La lagrangiana – se essa dipende esplicitamente da  $x$  – deve essere sostituita con  $L_\Delta = L(x - \Delta, \dot{x})$  per tempi precedenti a  $t$ ). Si trova <sup>20</sup>

$$p_k = \frac{\partial S(x_{k+1}, x_k)}{\partial x_{k+1}} = - \frac{\partial S(x_{k+1}, x_k)}{\partial x_k}. \quad (60)$$

Poiché  $\psi_\Delta(x, t)$  è uguale a  $\psi(x - \Delta, t)$ , ne consegue la stretta connessione fra  $p_k$  e la derivata spaziale della funzione d'onda.

Gli operatori di momento angolare sono connessi alle rotazioni in modo simile.

Ora, la derivata di  $S(x_{i+1}, t_{i+1}; x_i, t_i)$  rispetto a  $t_{i+1}$  compare nella definizione di  $H_i$ , mentre la derivata rispetto a  $x_{i+1}$  definisce  $p_i$ . Ma la derivata di  $S(x_{i+1}, t_{i+1}; x_i, t_i)$  rispetto a  $t_{i+1}$  è connessa alla derivata rispetto a  $x_{i+1}$ , dato che la funzione  $S(x_{i+1}, t_{i+1}; x_i, t_i)$  definita dall'eq. (55) soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi. Quindi tale equazione esprime  $H_i$  in funzione di  $p_i$ . In altre parole, l'equazione di Hamilton-Jacobi esprime il fatto che stati traslati temporalmente sono connessi alla traslazione spaziale degli stati originali. Questa idea porta direttamente ad una derivazione dell'equazione di Schrödinger che è molto più elegante di quella considerata precedentemente.

## 11. INADEGUATEZZA DELLA PRESENTE FORMULAZIONE

La formulazione descritta in questo lavoro possiede un serio inconveniente: i concetti matematici su cui si basa sono nuovi. Essa richiede per ora una suddivisione artificiosa ed innaturale dell'intervallo di tempo per chiarire il significato delle equazioni. Questa situazione può essere migliorata notevolmente mediante l'uso di notazioni e concetti della matematica dei funzionali.

<sup>20</sup> Non abbiamo sostituito  $p_i$  dato dall'eq. (60) direttamente nell'eq. (47) perché altrimenti l'eq. (47) non sarebbe più stata valida né all'ordine zero né al prim'ordine in  $\epsilon$ . Avremmo potuto derivare le relazioni di commutazione ma non le equazioni del moto. Le due espressioni nell'eq. (60) rappresentano gli impulsi ai due estremi dell'intervallo  $[t_i, t_{i+1}]$  – essi differiscono per  $\epsilon V'(x_{k+1})$ , a causa della forza agente durante il tempo  $\epsilon$ .

Abbiamo tuttavia ritenuto opportuno evitare questi metodi in una prima presentazione. Ulteriormente è necessario avere a disposizione un'appropriata misura sullo spazio funzionale dei cammini  $x(t)$ <sup>10</sup>.

Questa formulazione è anche incompleta dal punto di vista fisico. Una caratteristica fondamentale della meccanica quantistica è l'invarianza per trasformazioni unitarie, che corrispondono alle trasformazioni canoniche della meccanica classica. Naturalmente, si può dimostrare che la presente formulazione è invariante per trasformazioni unitarie, in virtù della sua equivalenza con la formulazione usuale. Non è però *fisicamente* ovvio che sussista tale invarianza. Questa incompletezza si manifesta in un modo ben definito. Non è stato descritto alcun procedimento diretto per misurare grandezze diverse dalla posizione. Ad esempio, misure dell'impulso di una particella possono essere definite in termini di misure di posizione di altre particelle. Analizzando questa situazione in modo dettagliato si ottiene la connessione fra misure di impulso e trasformata di Fourier della funzione d'onda. Questo è però un metodo piuttosto involuto per ottenere un risultato così importante. È naturale attendersi che i nostri postulati possano essere generalizzati sostituendo l'idea dei "cammini in una regione  $R$  dello spazio-tempo" con quella di "cammini della classe  $R$ ", o "cammini che hanno la proprietà  $R$ ". Non è però chiaro in generale quale proprietà specifica debba corrispondere a misurazioni fisiche.

## 12. UNA POSSIBILE GENERALIZZAZIONE

La formulazione che abbiamo considerato suggerisce un'ovvia generalizzazione. Ci sono problemi classici interessanti che soddisfano ad un principio d'azione, ma per i quali l'azione non può essere scritta come l'integrale di una funzione della posizione e della velocità. L'azione può contenere ad esempio l'accelerazione, oppure – se l'interazione non è istantanea – essa può contenere il prodotto delle coordinate a due tempi diversi, come  $\int x(t)x(t+T)dt$ . Allora l'azione non può venire suddivisa nella somma di piccoli contributi, come è stato fatto nell'eq. (10). Di conseguenza, lo stato del sistema non può essere descritto da una funzione d'onda. Ciò nonostante si può definire la probabilità di transizione da una regione  $R'$  ad una regione  $R''$ . La maggior parte della teoria degli elementi di transizione  $\langle \chi_{t''} | F | \psi_{t'} \rangle_S$  può essere estesa a questo caso. È sufficiente inventare un simbolo del tipo  $\langle R'' | F | R' \rangle_S$  definito da un'equazione simile all'eq. (39) in cui non compaiono  $\psi$  e  $\chi$ , ed in cui figura per  $S$  l'espressione più generale dell'azione. L'hamiltoniana ed il funzionale d'impulso possono essere definiti come nel paragrafo (10). Ulteriori dettagli sono contenuti nella tesi dell'autore<sup>21</sup>.

<sup>21</sup> La teoria dell'elettromagnetismo descritta da J. A. Wheeler e R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **17**, 157 (1945) può essere espressa in forma di principio di minima azione in cui compaiono solamente le coordinate delle particelle. È stato il tentativo di quantizzare questa

### 13. APPLICAZIONE ALL'ELIMINAZIONE DEGLI OSCILLATORI DI CAMPO

Un aspetto caratteristico della presente formulazione è che essa offre una visione panoramica delle relazioni spazio-temporali in una data situazione. Prima di effettuare l'integrazione sulle  $x_i$  in un'espressione come l'eq. (39) si ha a disposizione una formula in cui vari funzionali  $F$  possono essere inseriti. Si possono quindi studiare le relazioni esistenti fra gli stati quantistici del sistema a tempi diversi. Discuteremo ora un esempio per rendere più definite queste osservazioni piuttosto vaghe.

In elettrodinamica classica i campi che descrivono, ad esempio, l'interazione fra due particelle possono essere rappresentati da un insieme di oscillatori. Le equazioni del moto di questi oscillatori possono venire risolte, e gli oscillatori possono essere eliminati (potenziali di Lienard e Wiechert). Le interazioni che ne risultano correlano il moto di una particella ad un dato tempo con quello dell'altra particella ad un tempo diverso. In elettrodinamica quantistica il campo è ancora rappresentato da un insieme di oscillatori, in questo caso però non si può calcolare il moto degli oscillatori, cosicché questi non possono venir eliminati. A dire il vero, gli oscillatori che rappresentano onde longitudinali possono essere eliminati, il che dà luogo ad un'interazione elettrostatica istantanea. L'eliminazione elettrostatica è molto istruttiva, in quanto mostra in modo molto chiaro la difficoltà dell'auto-interazione. Di fatto, la situazione è così chiara che non c'è alcuna ambiguità nel decidere quale termine è scorretto e debba essere eliminato. Né l'intero procedimento, né il termine eliminato sono relativisticamente invarianti. Sarebbe auspicabile che anche gli oscillatori che rappresentano onde trasversali potessero essere eliminati. Ciò rappresenta un problema pressoché insormontabile nella meccanica quantistica convenzionale. Ci aspettiamo che il moto di una particella  $A$  ad un dato istante dipenda dal moto di  $B$  ad un istante precedente e *vice versa*. Una funzione d'onda  $\psi(x_a, x_b; t)$  può invece descrivere solo la dinamica di entrambe le particelle allo stesso tempo. Non c'è alcun modo di tener conto di ciò che  $B$  ha fatto nel passato al fine di determinare il comportamento di  $A$ . L'unica possibilità consiste nello specificare lo stato, al tempo  $t$ , dell'insieme di oscillatori, che servono per "ricordare" ciò che  $B$  (ed  $A$ ) hanno fatto.

La presente formulazione permette di determinare il moto di tutti gli oscillatori, e di eliminarli completamente dalle equazioni del moto che descrivono le particelle. Tutto ciò è facile. Si devono solo risolvere le equazioni del moto degli oscillatori prima di integrare sulle variabili  $x_i$  delle particelle. È proprio l'integrazione sulle  $x_i$  che cerca di condensare la storia passata in un'unica

---

teoria – senza alcun riferimento ai campi – che ha portato l'autore a studiare la formulazione della meccanica quantistica considerata qui. L'estensione di tali idee al caso di funzionali d'azione più generali è stata sviluppata nella sua tesi di Ph. D. "Il principio di minima azione in meccanica quantistica" (tesi presentata all'università di Princeton, 1942).

funzione d'onda. Questo è ciò che vogliamo evitare. Naturalmente, il risultato dipende dagli stati iniziale e finale dell'oscillatore. Qualora essi siano specificati, il risultato è un'equazione per  $\langle \chi_{t''} | 1 | \psi_{t'} \rangle$  simile all'eq. (38), in cui appare come fattore – oltre che  $\exp(iS/\hbar)$  – un altro funzionale  $G$  che dipende soltanto dalle coordinate che descrivono le traiettorie delle particelle.

Illustriamo brevemente come ciò avvenga in un caso molto semplice. Supponiamo che una particella (coordinata  $x(t)$ , lagrangiana  $L(x, \dot{x})$ ) interagisca con un oscillatore (coordinata  $q(t)$ , lagrangiana  $\frac{1}{2}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$ ) mediante un termine  $\gamma(x, t)q(t)$  nella lagrangiana per il sistema complessivo. Qui  $\gamma(x, t)$  è una funzione arbitraria della coordinata  $x(t)$  della particella e del tempo<sup>22</sup>. Supponiamo di voler conoscere la probabilità di una transizione da uno stato al tempo  $t'$ , in cui la funzione d'onda della particella è  $\psi_{t'}$  e l'oscillatore è nel livello energetico  $n$ , ad uno stato al tempo  $t''$  con la particella in  $\chi_{t''}$  e l'oscillatore nel livello  $m$ . La probabilità cercata è il quadrato di

$$\begin{aligned} & \langle \chi_{t''}, \varphi_m | 1 | \psi_{t'}, \varphi_n \rangle_{S_p + S_O + S_I} \\ &= \int \cdots \int \varphi_m^*(q_j) \chi_{t''}^*(x_j) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (S_p + S_O + S_I) \right] \psi_{t'}(x_0) \varphi_n(q_0) \cdot \\ & \quad \frac{dx_0}{A} \frac{dq_0}{a} \cdots \frac{dx_{j-1}}{A} \frac{dq_{j-1}}{a} dx_j dq_j. \end{aligned} \quad (61)$$

Qui  $\varphi_n(q)$  è la funzione d'onda dell'oscillatore nello stato  $n$ ,  $S_p$  è l'azione

$$\sum_{i=0}^{j-1} S_p(x_{i+1}, x_i)$$

calcolata per la particella immaginando che l'oscillatore sia assente,

$$S_O = \sum_{i=0}^{j-1} \left[ \frac{\epsilon}{2} \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{\epsilon} \right)^2 - \frac{\epsilon \omega^2}{2} q_{i+1}^2 \right]$$

è l'azione del solo oscillatore, e

$$S_I = \sum_{i=0}^{j-1} \gamma_i q_i$$

(ove  $\gamma_i = \gamma(x_i, t_i)$ ) è l'azione per l'interazione fra particella ed oscillatore. La costante di normalizzazione per l'oscillatore,  $a$ , vale  $(2\pi\epsilon i/\hbar)^{-\frac{1}{2}}$ . Ora

<sup>22</sup> La generalizzazione al caso in cui  $\gamma$  dipende dalla velocità  $\dot{x}$  della particella non presenta problemi.

l'esponenziale dipende quadraticamente da tutte le  $q_i$ , quindi l'integrazione su tutte le variabili  $q_i$  ( $0 < i < j$ ) può essere effettuata facilmente - si tratta di una sequenza di integrali gaussiani.

Pertanto scrivendo  $T = t'' - t'$ , si trova che il risultato di tale integrazione è  $(2\pi \hbar i \sin \omega T / \omega)^{-\frac{1}{2}} \exp[(i/\hbar)(S_p + Q(q_j, q_0))]$ , ove  $Q(q_j, q_0)$  risulta essere proprio l'azione classica per l'oscillatore armonico forzato (vedasi la nota 15). Esplicitamente si ha

$$Q(q_j, q_0) = \frac{\omega}{2 \sin \omega T} \left[ \cos \omega T (q_j^2 + q_0^2) - 2q_j q_0 + \right. \\ \left. \frac{2q_0}{\omega} \int_{t'}^{t''} \gamma(t) \sin \omega(t - t') dt + \right. \\ \left. \frac{2q_j}{\omega} \int_{t'}^{t''} \gamma(t) \sin \omega(t'' - t) dt - \right. \\ \left. \frac{2}{\omega^2} \int_{t'}^{t''} \int_{t'}^t \gamma(t) \gamma(s) \sin \omega(t'' - t) \sin \omega(s - t') ds dt \right],$$

ove  $\gamma(t)$  è stata trattata come funzione continua del tempo. Gli integrali dovrebbero in realtà essere sostituiti da somme di Riemann e le quantità  $\gamma(x_i, t_i)$  andrebbero scritte al posto di  $\gamma(t_i)$ . Quindi  $Q$  dipende dalle coordinate della particella a tutti i tempi attraverso  $\gamma(x_i, t_i)$ , e da quella dell'oscillatore ai soli tempi  $t'$  e  $t''$ . Corrispondentemente l'eq. (61) diventa

$$\langle \chi_{t''}, \varphi_m | 1 | \psi_{t'}, \varphi_n \rangle_{S_p + S_o + S_I} = \\ \int \cdots \int \chi_{t''}^*(x_j) G_{mn} \exp\left(\frac{i S_p}{\hbar}\right) \psi_{t'}(x_o) \frac{dx_0}{A} \cdots \frac{dx_{j-1}}{A} dx_j = \\ \langle \chi_{t''} | G_{mn} | \psi_{t'} \rangle_{S_p}$$

che ora contiene solamente le coordinate della particella. La quantità  $G_{mn}$  è data da

$$G_{mn} = (2\pi i \hbar \sin \omega T / \omega)^{-\frac{1}{2}} \int \int \varphi_m^*(q_j) \cdot \\ \exp[(i/\hbar)Q(q_j, q_0)] \varphi_n(q_0) dq_j dq_0.$$

Procedendo in modo analogo si trova che tutti gli oscillatori del campo elettromagnetico possono essere eliminati da una descrizione del moto delle cariche.

#### 14. MECCANICA STATISTICA

##### *Spin e relatività*

Spesso i problemi della teoria della misurazione e della meccanica statistica quantistica si semplificano quando vengono formulati secondo il punto di vista descritto in questo lavoro. Ad esempio, la perturbazione dovuta all'influenza di uno strumento di misura può – in linea di principio – essere eliminata per integrazione nello stesso modo in cui si è proceduto per l'oscillatore. La matrice densità statistica ha una generalizzazione utile e piuttosto ovvia, che si ottiene considerando il quadrato dell'eq. (38). È un'espressione simile all'eq. (38), contenente però l'integrazione sui due insiemi di variabili  $dx_i$  e  $dx'_i$ . L'esponenziale è sostituito da  $\exp[(i/\hbar)(S - S')]$ , ove  $S'$  dipende funzionalmente dalle variabili  $x'_i$  nello stesso modo in cui  $S$  dipende dalle variabili  $x_i$ . Essa descrive, ad esempio, il risultato dell'eliminazione degli oscillatori di campo quando lo stato finale degli oscillatori non è specificato e si considera soltanto la somma su tutti gli stati finali  $m$ .

Lo spin può essere incluso nella nostra discussione in modo formale e l'equazione di Pauli per lo spin può essere ottenuta nel modo seguente. Si sostituisce in  $S(x_{i+1}, x_i)$  il termine di interazione col potenziale vettore

$$\frac{e}{2c}(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_i) + \frac{e}{2c}(\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1})$$

dato dall'espressione (13) con

$$\frac{e}{2c}[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)][\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)] + \frac{e}{2c}[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}_{i+1})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i)].$$

Qui  $\mathbf{A}$  è il potenziale vettore,  $\mathbf{x}_{i+1}$  e  $\mathbf{x}_i$  sono i vettori posizione della particella ai tempi  $t_{i+1}$  e  $t_i$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  è il vettore formato dalle matrici di spin di Pauli. La grandezza  $\Phi$  deve ora essere espressa come  $\prod_i \exp[(i/\hbar)S(x_{i+1}, x_i)]$ , in quanto essa differisce dall'esponenziale della somma di  $S(x_{i+1}, x_i)$ . Quindi  $\Phi$  è qui una matrice di spin.

Anche l'equazione relativistica di Klein-Gordon può essere ottenuta formalmente, aggiungendo una quarta coordinata per specificare i cammini. Si considera un "cammino" come individuato da quattro funzioni  $x^\mu(\tau)$  di un

parametro  $\tau$ . Tale parametro viene trattato nello stesso modo in cui si considerava la variabile  $t$ : esso viene suddiviso in intervalli di lunghezza  $\epsilon$ . Le grandezze  $x^1(\tau)$ ,  $x^2(\tau)$ ,  $x^3(\tau)$  sono le coordinate spaziali di una particella, mentre  $x^4(\tau)$  è il tempo corrispondente. Si usa la lagrangiana

$$\sum_{\mu=1}^4 [(dx^\mu/d\tau)^2 + (e/c)(dx^\mu/d\tau)A_\mu],$$

in cui  $A^\mu$  è il quadrivettore potenziale e nella somma i termini con  $\mu = 1, 2, 3$  sono presi con segno opposto. Si può dimostrare che una funzione d'onda che dipende periodicamente da  $\tau$  soddisfa necessariamente l'equazione di Klein-Gordon. L'equazione di Dirac si ottiene modificando la lagrangiana usata per l'equazione di Klein-Gordon – modifica che è simile a quella necessaria nella lagrangiana non relativistica per derivare l'equazione di Pauli. Ciò che si ottiene è il quadrato dell'usuale operatore di Dirac.

Questi risultati per lo spin e la relatività sono puramente formali, e nulla aggiungono alla nostra comprensione di tali equazioni. Ci sono altri modi di ottenere l'equazione di Dirac che appaiono più promettenti al fine di ottenere una migliore interpretazione fisica di questa bella ed importante equazione.

L'autore apprezza sinceramente gli utili consigli del professor H. C. Corben e signora e del professor H. A. Bethe. Egli desidera ringraziare il professor J. A. Wheeler per moltissime discussioni durante le fasi iniziali di questo lavoro.





## §5. Nuova formulazione della meccanica quantistica

5.1 – Vogliamo concludere questo Quaderno con la discussione di una formulazione della meccanica quantistica (non relativistica) ottenuta molto recentemente da uno degli autori (M. R.)<sup>23</sup>. Questa scelta ha una duplice motivazione. Vedremo infatti (come anticipato nel paragrafo 2.8) che i cammini di Feynman *generalizzati* hanno una *profonda connessione* con le traiettorie dinamiche classiche. E nell'ambito del nuovo approccio, essi acquistano una caratterizzazione *esplicita* come *soluzioni* di un' *equazione differenziale stocastica*<sup>24</sup>. D'altro lato, la formulazione che descriveremo emerge in modo completamente *naturale* dall'analogia fra meccanica quantistica e processi stocastici classici (su cui ci siamo soffermati a lungo nel capitolo 3): essa non è altro che la *controparte quantistica* della descrizione di Langevin di un PSMC. Scriviamo simbolicamente

$$\begin{array}{ccc} \text{FORMULAZIONE} & \longleftrightarrow & \text{PRESENTE} \\ \text{DI LANGEVIN} & & \text{FORMULAZIONE.} \end{array} \quad (5.1)$$

Ci sembra quindi sorprendente che questo nuovo approccio non sia già noto da alcuni decenni!

5.2 – Abbiamo visto che un PSMC può essere descritto in due modi equivalenti, anche se molto differenti fra di loro: l'uno basato sull'equazione di Fokker-Planck, l'altro sull'integrale di Wiener. Ma esiste un' *ulteriore* formulazione di un PSMC (alquanto diversa dalle precedenti) dovuta a Langevin<sup>25</sup>.

L'approccio di Langevin è in un certo senso il più profondo, in quanto si considerano *esplicitamente* le traiettorie fisiche del processo – come vedremo, *ogni altra informazione* viene derivata da queste. Ricordiamo che esse *non* figurano nell'approccio di Fokker-Planck, mentre compaiono *solo* in forma *implicita* nella formulazione di Wiener. Ulteriormente l'effetto delle

---

<sup>23</sup> M. Roncadelli, *New Formulation of Quantum Mechanics*, Pavia preprint (1991) (in corso di pubblicazione); *Random Path Quantization of Nonrelativistic Systems*, Pavia preprint (1991) (in corso di pubblicazione); *Random Path Quantization in Action*, Pavia preprint (1991) (in corso di pubblicazione).

<sup>24</sup> Questo concetto verrà discusso nel prossimo paragrafo.

<sup>25</sup> P. Langevin, *Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris)* **146**, 530 (1908).

fluttuazioni è qui rappresentato in modo *esplicito*, contrariamente a quanto avviene nell'equazione di Fokker-Planck.

Al fine di semplificare la trattazione sfruttiamo l'osservazione fatta nel paragrafo 3.6 supponendo – per il momento – che il numero di particelle resti *costante*, cosicchè poniamo  $\Delta(x, t) = 0$  (effetti di emissione e di assorbimento verranno considerati in un secondo tempo).

Sappiamo che un PSMC può essere immaginato come un'evoluzione temporale deterministica perturbata da fluttuazioni gaussiane di fondo. Abbiamo anche visto che – in assenza di fluttuazioni – le traiettorie fisiche del processo sono date dall'eq. (3.22). Ora, l'*idea fondamentale* di Langevin consiste nel supporre che l'effetto delle *fluttuazioni* sulle traiettorie del processo possa venire descritto *aggiungendo* semplicemente un termine di *rumore* nell'eq. (3.22), cioè modificando tale equazione nel modo seguente

$$\frac{d}{dt}\xi_i(t) = V_i(\xi(t), t) + \eta_i(t). \quad (5.2)$$

Questa è la celebre *equazione di Langevin* <sup>26</sup>. È essenziale notare che nell'eq. (5.2) la *drift* è rimasta *inalterata*, in perfetto accordo col fatto che in un PSMC le fluttuazioni *non* interferiscono con gli effetti deterministici.

Discutiamo ora il significato dell'eq. (5.2). L'aspetto più caratteristico dell'equazione di Langevin è che le variabili  $\eta(t)$  *non* sono funzioni *assegnate* del tempo, bensì rappresentano un opportuno processo stocastico. Pertanto tali variabili vengono definite *solo in senso probabilistico*, specificando la loro *distribuzione di probabilità*  $P[\eta(\cdot)]$ . *Quale?* Al fine di determinare  $P[\eta(\cdot)]$  è conveniente limitarsi al caso  $V(x, t) = 0$  – ciò *non* comporta alcuna perdita di generalità, in quanto  $P[\eta(\cdot)]$  è *indipendente* da  $V(x, t)$  <sup>27</sup>. Quindi l'eq. (5.2) diventa ora

$$\frac{d}{dt}\xi_i^{(0)}(t) = \eta_i(t) \quad (5.3)$$

e chiaramente le sue soluzioni rappresentano le *traiettorie fisiche* del *processo di Wiener*. Sappiamo peraltro (si ricordi quanto detto alla fine del paragrafo 3.9) che la distribuzione di probabilità per tali traiettorie è <sup>28</sup>

<sup>26</sup> Essa è l'esempio più noto fra le *equazioni differenziali stocastiche*, su cui esiste una vasta letteratura matematica (si veda la bibliografia). Va osservato che i matematici scrivono l'eq. (5.2) nella forma più rigorosa  $d\xi_i(t) = V_i(\xi(t), t)dt + dw_i(t)$ , ove  $w_i$  è il *processo di Wiener* (ciò verrà ulteriormente chiarito nella nota 115). Preferiamo però attenerci qui al formalismo (meno rigoroso) che viene usato comunemente nelle applicazioni fisiche.

<sup>27</sup> Ancora una volta, questo fatto è conseguenza dell'indipendenza delle fluttuazioni dagli effetti deterministici.

<sup>28</sup> È ovvio che tutte le distribuzioni di probabilità devono essere normalizzate. D'altra parte,

$$P[\xi^{(0)}(\cdot)] \sim \exp \left\{ -(1/4D) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \dot{\xi}_i^{(0)}(t) \dot{\xi}_i^{(0)}(t) \right\}. \quad (5.4)$$

Poiché siamo interessati a determinare  $P[\eta(\cdot)]$ , notiamo che – facendo uso dell’eq. (5.3) – l’eq. (5.4) può venire riscritta come

$$P[\xi^{(0)}(\cdot)] \sim \exp \left\{ -(1/4D) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \eta_i(t) \eta_i(t) \right\}. \quad (5.5)$$

A questo punto sfruttiamo il fatto che ad *ogni* valore di  $\eta(t)$  corrisponde *un* valore di  $\xi^{(0)}(t)$  <sup>29</sup>, per cui la *probabilità* <sup>30</sup> per un dato insieme (continuo!) di valori di  $\eta(t)$  è *uguale* alla *probabilità* <sup>112</sup> per i corrispondenti valori di  $\xi^{(0)}(t)$ . Evidentemente ciò implica

$$\mathcal{D}\xi^{(0)}(t)P[\xi^{(0)}(\cdot)] = \mathcal{D}\eta(t)P[\eta(\cdot)]. \quad (5.6)$$

Ma l’eq. (5.3) è *lineare*, quindi il determinante (funzionale <sup>31</sup>) jacobiano che connette  $\mathcal{D}\xi^{(0)}(t)$  a  $\mathcal{D}\eta(t)$  è *costante*. Di conseguenza dall’eq. (5.6) deduciamo <sup>32</sup>

$$P[\xi^{(0)}(\cdot)] \sim P[\eta(\cdot)] \quad (5.7)$$

per cui dall’eq. (5.5) otteniamo infine

$$P[\eta(\cdot)] \sim \exp \left\{ -(1/4D) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \eta_i(t) \eta_i(t) \right\} \quad (5.8)$$

che ha la ben nota forma *gaussiana*.

quando si è interessati al calcolo dei *valori medi* (come in questo caso) è più economico ignorare momentaneamente tale richiesta, salvo poi normalizzare opportunamente i valori medi (ritorneremo su questo punto più avanti).

<sup>29</sup> Ciò segue semplicemente dall’ipotesi che  $\xi^{(0)}(t)$  e  $\eta(t)$  siano connessi dall’eq. (5.3). Si noti che sotto opportune condizioni di regolarità per  $V(x, t)$  (che supporremo soddisfatte) abbiamo più in generale che ad *ogni* valore di  $\eta(t)$  corrisponde *un* valore di  $\xi(t)$  soddisfacente all’eq. (5.2).

<sup>30</sup> Contrariamente alla pratica seguita in questo Quaderno, intendiamo *qui* realmente la *probabilità* e *non* la *densità* di probabilità!

<sup>31</sup> Questo perché stiamo effettuando un cambiamento di variabili fra *funzionali*.

<sup>32</sup> Dato che consideriamo distribuzioni di probabilità *non* normalizzate è superfluo indicare esplicitamente tale costante.

Un processo stocastico definito dall'eq. (5.8) è detto *rumore bianco gaussiano* (RBG) <sup>33,34</sup>.

Ritorniamo all'eq. (5.2). È chiaro che le sue soluzioni sono *funzioni* di  $t$  e della posizione  $x'$  fissata ad un (arbitrario) istante iniziale  $t'$  (*condizione iniziale*  $\xi(t') = x'$ ) oltre ad essere *funzionali* del RBG  $\eta(t)$ : le indicheremo come  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$ . Esse godono dell'importante proprietà

$$\Delta\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \sim (\Delta t)^{1/2} \quad (5.9)$$

che segue direttamente dal fatto che  $\eta(t)$  è un RBG <sup>35</sup>. Vediamo che le *traiettorie fisiche* di un PSMC sono *frattali* con dimensione di Hausdorff uguale a *due*, ritrovando così un risultato già ottenuto nell'ambito dell'approccio di Wiener (ritorneremo su questo punto in seguito).

Va notato che la descrizione di Langevin di un PSMC può *anche* essere vista come un *cambiamento di variabili*  $\eta(t) \rightarrow \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  definito dall'eq. (5.2) <sup>36</sup>: il carattere *non* banale di questa trasformazione è pura conseguenza degli effetti *deterministici*.

Quanto appena osservato suggerisce spontaneamente la domanda: qual'è la *distribuzione di probabilità*  $P[\xi(\cdot)]$  per le soluzioni dell'equazione di Langevin? L'argomento usato precedentemente per ottenere l'eq. (5.6) ha validità generale <sup>37</sup>, per cui ora abbiamo

$$\mathcal{D}\xi(t)P[\xi(\cdot)]_{t'}^{t''} = \mathcal{D}\eta(t)P[\eta(\cdot)]_{t'}^{t''}. \quad (5.10)$$

Si noti che adesso preferiamo considerare (per maggiore chiarezza) un intervallo di tempo *finito*  $t' \leq t \leq t''$ , supponendo che alle soluzioni considerate sia imposta la condizione iniziale  $\xi(t') = x'$ . Dall'eq. (5.10) segue <sup>38</sup>

<sup>33</sup> Strettamente parlando, il RBG è una grandezza matematicamente patologica. È per questo motivo che i matematici scrivono l'equazione di Langevin come indicato nella nota 108. Ulteriormente nella notazione qui usata si ha  $w_i(t) = \xi_i^{(0)}(t)$ . Tuttavia è stato dimostrato che l'uso del RBG porta a risultati *corretti*. (Per una trattazione matematicamente rigorosa del RBG si veda: L. Arnold, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications* (Wiley, New York, 1973)).

<sup>34</sup> Si osservi che le variabili  $\eta(t)$  *non* appartengono alla particella considerata e possono anche venire interpretate fisicamente come descrittivi un "campo esterno fluttuante" agente su di essa: ecco perché abbiamo usato l'espressione "*fluttuazioni di fondo*"!

<sup>35</sup> Più precisamente, è facile dimostrare che  $\Delta w(t) \sim (\Delta t)^{1/2}$ . Quindi l'equazione  $d\xi(t) = V(\xi(t), t)dt + dw(t)$  implica l'eq. (5.9).

<sup>36</sup> Ciò non deve stupire: l'intera teoria delle probabilità è, in ultima analisi, una trasformazione di variabili (si veda al proposito il testo di Van Kampen citato nella nota 75)!

<sup>37</sup> Si tenga presente quanto detto nella nota 111.

<sup>38</sup> Unicamente per motivi tipografici scriviamo qui semplicemente  $P[\xi(\cdot)]$  anziché più correttamente  $P[\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])]$ .

$$P[\xi(\cdot)]_{t'}^{t''} = J(t'', t') P[\eta(\cdot)]_{t'}^{t''} \quad (5.11)$$

ove  $J(t'', t')$  è il determinante (funzionale <sup>113</sup>) jacobiano corrispondente, cioè  $J(t'', t') \equiv \det|\delta\eta_i(t)/\delta\xi_j(t^*)|$ . Naturalmente l'eq. (5.2) non è più lineare (in generale), cosicché  $J(t'', t')$  non è costante. Grazie all'eq. (5.2),  $J(t'', t')$  può essere riscritto in modo più eloquente come

$$J(t'', t') = \det \left[ \left. \frac{d}{dt} \delta_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} V_i(x, t) \right]_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \delta(t - t^*) \right]. \quad (5.12)$$

Il calcolo esplicito di  $J(t'', t')$  può venire effettuato con manipolazioni formali partendo dall'eq. (5.12). Si ottiene <sup>39</sup>

$$J(t'', t') \sim \exp \left\{ -(1/2) \int_{t'}^{t''} dt \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(x, t) \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} \quad (5.13)$$

quindi la distribuzione di probabilità per le *traiettorie fisiche* di un PSMC uscenti da  $(x', t')$  è <sup>120</sup>

$$P[\xi(\cdot)]_{t'}^{t''} \sim \exp \left\{ -(1/2) \int_{t'}^{t''} dt \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(x, t) \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} P[\eta(\cdot)]_{t'}^{t''}. \quad (5.14)$$

È evidente che in questo approccio *tutte* le quantità fisiche misurabili nascono come *medie* sul RBG di opportuni funzionali delle soluzioni dell'equazione di Langevin. La *media* di una certa quantità  $(\dots)$  è ovviamente definita come

$$\langle (\dots) \rangle_{\eta} \equiv N \int \mathcal{D}\eta(t) P[\eta(\cdot)] (\dots) \quad (5.15)$$

ove la costante di normalizzazione  $N$  deve essere fissata in modo che si abbia  $\langle 1 \rangle_{\eta} = 1$  <sup>40</sup>.

<sup>39</sup> Si veda ad es.: J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1989).

<sup>40</sup> Questa è la normalizzazione a cui abbiamo accennato nella nota 110.

Mostriamo ora come la probabilità di transizione  $P(x'', t'' | x', t')$  di un PSMC possa venire espressa in termini delle soluzioni dell'equazione di Langevin <sup>41</sup>. A tal fine consideriamo ancora l'evento  $B$  “ $\Sigma$  va da  $(x', t')$  a  $(x'', t'')$ ” la cui *probabilità* (totale) è proprio  $P(x'', t'' | x', t')$ . Nel presente contesto tutte le alternative disgiunte <sup>42</sup> secondo le quali  $B$  può realizzarsi sono descritte da quelle soluzioni  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  che soddisfano la condizione

$$\xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot)]) = x'' \quad (5.16)$$

per *tutte* le possibili configurazioni  $\eta(t)$  del RBG. In *realtà* abbiamo però a che fare con soluzioni *generiche*, che *non* soddisfano in generale la condizione (5.16). Si può superare questo ostacolo associando ad ogni  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  la seguente *probabilità di transizione*

$$P_*(x'', t'' | x', t')[\xi(\cdot)] \equiv \left( \begin{array}{l} \text{probabilità che } \Sigma \text{ si muova lungo} \\ \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \text{ e vada da } (x', t') \text{ a } (x'', t'') \end{array} \right). \quad (5.17)$$

Evidentemente, quando accade che  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  soddisfa l'eq. (5.16),  $P_*(x'', t'' | x', t')[\xi(\cdot)]$  è proprio la probabilità relativa ad una generica alternativa disgiunta associata all'evento  $B$ . Ma sappiamo che secondo il *calcolo classico delle probabilità* la probabilità (totale) di un evento è data dalla somma delle probabilità relative alle possibili alternative disgiunte secondo cui esso può realizzarsi. Abbiamo pertanto

$$P(x'', t'' | x', t') = \int_{(5.16)} \mathcal{D}\xi(t) P_*(x'', t'' | x', t')[\xi(\cdot)] \quad (5.18)$$

ove il suffisso (5.16) al segno di integrazione sta ad indicare che l'integrale va esteso *solo* all'insieme di soluzioni dell'eq. (5.2) che soddisfano la condizione (5.16). Procediamo osservando che  $P_*(x'', t'' | x', t')[\xi(\cdot)]$  è di fatto una probabilità *congiunta*, per cui possiamo riscrivere l'eq. (5.17) nella forma

$$P_*(x'', t'' | x', t')[\xi(\cdot)] = \left( \begin{array}{l} \text{probabilità che } \Sigma \text{ vada da } (x', t') \\ \text{a } (x'', t'') \text{ lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \middle| \begin{array}{l} \Sigma \text{ si muove} \\ \text{lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \right).$$

<sup>41</sup> Abbiamo voluto presentare qui una discussione più dettagliata di quanto usualmente venga fatto.

<sup>42</sup> Si ricordi l'osservazione fatta nella nota 28.

$$\left( \begin{array}{l} \text{probabilità che } \Sigma \text{ si muova} \\ \text{lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \right). \quad (5.19)$$

Ulteriormente è evidente che

$$\left( \begin{array}{l} \text{probabilità che } \Sigma \text{ si muova} \\ \text{lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \right) = P[\xi(\cdot)]_{t'}^{t''}. \quad (5.20)$$

Pertanto, ponendo

$$P(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)] \equiv \left( \begin{array}{l} \text{probabilità che } \Sigma \text{ vada da } (x', t') \\ \text{a } (x'', t'') \text{ lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \middle| \begin{array}{l} \Sigma \text{ si muove} \\ \text{lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \right), \quad (5.21)$$

otteniamo

$$P_*(x'', t'' | x', t') [\xi(\cdot)] = P(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)] P[\xi(\cdot)]_{t'}^{t''} \quad (5.22)$$

in virtù delle eq. (5.19), (5.20) e (5.21). Corrispondentemente l'eq. (5.18) assume la forma

$$P(x'', t'' | x', t') = \int_{(5.16)} \mathcal{D}\xi(t) P[\xi(\cdot)]_{t'}^{t''} P(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)]. \quad (5.23)$$

Ma grazie all'eq. (5.10) abbiamo

$$P(x'', t'' | x', t') = \int_{(5.16)} \mathcal{D}\eta(t) P[\eta(\cdot)]_{t'}^{t''} P(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)]. \quad (5.24)$$

A questo punto è necessario conoscere l'espressione di  $P(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)]$  in funzione di  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$ . Abbiamo supposto finora che il numero di particelle fosse *costante*. È chiaro che in tale situazione si ha

$$P_0(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)] = \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])). \quad (5.25)$$

Tuttavia è facile estendere l'eq. (5.25) al caso *generale* in cui  $\Delta(x, t) \neq 0$ . Ponendo per convenienza

$$\Gamma[\eta(\cdot)]_{t'}^{t''} \equiv \left( \begin{array}{l} \text{probabilità di sopravvivenza lungo} \\ \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \text{ nell' intervallo } t' \leq t \leq t'' \end{array} \right) \quad (5.26)$$

semplici argomenti probabilistici <sup>43</sup> forniscono

$$\Gamma[\eta(\cdot)]_{t'}^{t''} = \exp \left\{ - \int_{t'}^{t''} dt \Delta(\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]), t) \right\} \quad (5.27)$$

cosicch  al posto dell'eq. (5.25) otteniamo ora

$$P(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)] = \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])) \Gamma[\eta(\cdot)]_{t'}^{t''} \quad (5.28)$$

in quanto i processi di emissione ed assorbimento *non* interferiscono con gli effetti deterministici e delle fluttuazioni (quindi le relative probabilit  si *moltiplicano*). Ma se inseriamo l'eq. (5.28) nell'eq. (5.24) scopriamo un fatto molto importante: la forma particolare di  $P(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)]$  tiene conto *automaticamente* del vincolo che la condizione (5.16) debba essere soddisfatta! Concludiamo (in virt  delle eq. (5.15) e (5.24)) che nella formulazione di Langevin la *probabilit  di transizione*   data da <sup>44</sup>

$$P(x'', t'' | x', t') = \left\langle P(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)] \right\rangle_{\eta}. \quad (5.29)$$

Possiamo anche riscrivere l'eq. (5.29) in forma pi  *esplicita*, facendo uso delle eq. (5.27) e (5.28). Otteniamo cos 

$$P(x'', t'' | x', t') = \left\langle \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])) \cdot \exp \left\{ - \int_{t'}^{t''} dt \Delta(\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]), t) \right\} \right\rangle_{\eta}. \quad (5.30)$$

Un vantaggio dell'approccio di Langevin   permettere una derivazione della formulazione di Wiener in modo *molto semplice* <sup>45</sup>. Consideriamo

<sup>43</sup> Si veda ad es.: F. W. Wiegel, *Introduction to Path Integral Methods in Physics and Polymer Science* (World Scientific, Singapore, 1986).

<sup>44</sup> Vediamo che  $P(x'', t'' | x', t')$    effettivamente normalizzata.

<sup>45</sup>   anche possibile derivare l'equazione di Fokker-Planck. Il metodo "classico" (basato sulla cosiddetta *espansione di Kramers-Moyal*)   riportato ad es. in: H. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (Springer, Berlin, 1984). Un metodo alternativo   descritto nel testo di Zinn-Justin citato nella nota 121.



nuovamente l'insieme  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$  delle funzioni continue  $x(t)$  con estremi fissi  $x(t') = x'$ ,  $x(t'') = x''$ . Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 3.9, fissiamo l'attenzione sulla probabilità  $P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)]$  definita dall'eq. (3.42). Essenzialmente, ciò che ci proponiamo di fare è derivare il *postulato* W2. Va notato che ora tutti i cammini  $x(t)$  congiungono  $(x', t')$  con  $(x'', t'')$ , per cui se la particella si muove lungo un certo  $x(t)$  essa raggiunge  $(x'', t'')$  con *certezza* – la situazione era *diversa* quando consideravamo le soluzioni dell'eq. (5.2). Pertanto è evidente che, nel caso in cui  $x(t)$  coincida con  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  per *tutti* i valori di  $t$  compresi nell'intervallo  $t' \leq t \leq t''$ , abbiamo  $P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)] = P_*(x'', t''|x', t')[\xi(\cdot)]$ . Questa osservazione piuttosto ovvia può essere formalizzata nel modo seguente

$$P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)] = \int \mathcal{D}\xi(t) \delta[x(t) - \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])]_{t'}^{t''} \cdot P_*(x'', t''|x', t')[\xi(\cdot)] \quad (5.31)$$

ove  $\delta[\dots]$  è una delta *funzionale* di Dirac, cioè il prodotto continuo di funzioni delta di Dirac per tutti i valori di  $t$  compresi nell'intervallo  $t' \leq t \leq t''$ . Usando le eq. (5.10), (5.15) e (5.22), l'eq. (5.31) assume la forma

$$P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)] = \left\langle \delta[x(t) - \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])]_{t'}^{t''} P(x'', t''|x', t')[\eta(\cdot)] \right\rangle_{\eta} \quad (5.32)$$

Siamo così riusciti ad esprimere la probabilità per un cammino di Wiener nell'ambito dell'approccio di Langevin. Non solo, ma inserendo nell'eq.(5.32) l'espressione di  $P(x'', t''|x', t')[\eta(\cdot)]$  data dalle eq. (5.27) e (5.28) è possibile calcolare *esplicitamente*  $P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)]$ . Si trova per questa via proprio quanto stabilito dal *postulato* W2. Ma è anche possibile derivare il *postulato* W3! Infatti, integrando l'eq. (5.32) su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$  si ha

$$\int \mathcal{D}x(t) P(x'', t''|x', t')[x(\cdot)] = \left\langle P(x'', t''|x', t')[\eta(\cdot)] \right\rangle_{\eta} \quad (5.33)$$

in quanto l'operazione di integrazione non fa altro che eliminare  $\delta[\dots]$  dal secondo membro dell'eq. (5.32). E grazie all'eq. (5.29) otteniamo l'eq. (3.47).

Vogliamo concludere con un'importante osservazione. Come segue dalle eq. (3.49) e (5.9), *sia* i cammini di Wiener *che* le soluzioni dell'equazione di Langevin sono *frattali* con dimensione di Hausdorff uguale a *due*. Ciò *non*

è casuale. La derivazione dei postulati W2 e W3 mostra chiaramente che *i cammini di Wiener che congiungono*  $(x', t')$  *con*  $(x'', t'')$  *possono venir interpretati come soluzioni*  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  *che soddisfano la condizione*  $\xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot)]) = x''$  *– dopo tutto, gli uni e gli altri descrivono le stesse traiettorie fisiche di un PSMC!*

Quest'ultimo è un risultato di grande rilevanza, per cui ci sembra opportuno darne una dimostrazione alternativa (che può forse apparire più esplicita della precedente). Chiediamoci quale sia la distribuzione di probabilità per le traiettorie fisiche di un PSMC uscenti da  $(x', t')$ . Si osservi che nel caso in cui il numero di particelle è *costante* la risposta già la conosciamo: è fornita dall'eq. (5.14). È però molto facile considerare il *caso generale*, in quanto basta combinare l'eq. (5.14) con l'eq. (5.27) (quest'ultima tiene conto dei processi di emissione e assorbimento)<sup>46</sup>. Otteniamo<sup>120</sup>

$$P[\xi(\cdot)]_{t'}^{t''} \sim \exp \left\{ - \int_{t'}^{t''} dt \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(x, t) + \Delta(x, t) \right] \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} \cdot P[\eta(\cdot)]_{t'}^{t''} \quad (5.34)$$

in cui compare esplicitamente il RBG. Tuttavia  $P[\xi(\cdot)]$  può venire espressa *completamente* in termini di  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$ . A tal fine è sufficiente eliminare  $\eta(t)$  dall'eq. (5.8) facendo uso dell'eq. (5.2). Abbiamo quindi

$$P[\xi(\cdot)]_{t'}^{t''} \sim \exp \left\{ - \int_{t'}^{t''} dt \left[ \frac{1}{4D} (\dot{x}_i - V_i(x, t))^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} V_i(x, t) + \Delta(x, t) \right] \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\}. \quad (5.35)$$

Ma l'eq. (5.35) *coincide* con la distribuzione di probabilità  $P[x(\cdot)]$  per i *cammini di Wiener*<sup>47</sup> (si vedano le eq. (3.43), (3.44), (3.45) e (3.46)), dimostrando così la *completa equivalenza* fra questi ultimi e le soluzioni  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  che passano per  $(x'', t'')$ .

**5.3 – Nel caso della particella  $\mathcal{S}$  descritta dall'azione classica (2.33) è un gioco fin troppo facile ottenere una formulazione della meccanica quantistica**

<sup>46</sup> Procediamo nello stesso modo in cui abbiamo derivato l'eq. (5.28) partendo dall'eq. (5.25).

<sup>47</sup> Naturalmente questi ultimi soddisfano la condizione  $x(t'') = x''$  mentre le soluzioni dell'eq. (5.2) che figurano nell'eq. (5.35) *non* soddisfano (in generale) la condizione (5.16). Ma questo fatto è qui del tutto *irrelevante*.

come *controparte della descrizione di Langevin* di un PSMC: basta ricordare l'eq. (3.1) e far uso della *completa corrispondenza* fra le due teorie stabilita dalle eq. (3.39), (3.40) e (3.41) unitamente alle definizioni (3.35), (3.36) e (3.37)!

Cominciamo dall'equazione di Langevin (5.2). Grazie alle eq. (3.40) e (3.36) essa diventa

$$\frac{d}{dt}\xi_i(t) = -\frac{1}{m}\Omega_i(\xi(t), t) + \eta_i(t) \quad (5.36)$$

che è l'*equazione di Langevin* su cui è basato il presente approccio. Ora, nel caso di un PSMC le *fluttuazioni* sono simulate da un RBG definito dall'eq.(5.8). Analogamente – almeno da un punto di vista formale – le *fluttuazioni quantistiche*<sup>48</sup> sono simulate qui da un *rumore bianco di Fresnel* (RBF)<sup>49</sup>, che si ottiene dall'eq. (5.8) in virtù delle eq. (3.39) e (3.35). Naturalmente adesso le *probabilità* vanno sostituite dalle corrispondenti *ampiezze*. Quindi il RBF è definito dalla distribuzione di *ampiezza*<sup>50</sup>

$$A[\eta(\cdot)] \sim \exp \left\{ (i/2)(m/\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \eta_i(t)\eta_i(t) \right\}. \quad (5.37)$$

Un concetto chiave nella formulazione di Langevin di un PSMC è la *probabilità di transizione* (condizionata)  $P(x'', t''|x', t')[\eta(\cdot)]$  lungo  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  definita dall'eq. (5.21). Ponendo ora

$$\langle x'', t''|x', t' \rangle[\eta(\cdot)] \equiv \left( \begin{array}{c} \text{ampiezza che } \mathcal{S} \text{ vada da } (x', t') \\ \text{a } (x'', t'') \text{ lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \middle| \begin{array}{c} \mathcal{S} \text{ si muove} \\ \text{lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \right) \quad (5.38)$$

l'eq. (3.1) implica evidentemente

$$P(x'', t''|x', t')[\eta(\cdot)] \longleftrightarrow \langle x'', t''|x', t' \rangle[\eta(\cdot)]. \quad (5.39)$$

<sup>48</sup> L'espressione “*fluttuazioni quantistiche*” viene usata con significati spesso differenti. Ritorniamo su questo argomento nel paragrafo 5.7.

<sup>49</sup> Questa denominazione trae origine dal fatto che nell'eq. (5.37) figura l'analogo funzionale di un integrale di Fresnel. Si noti che formalmente il RBF può essere visto come un RBG con costante di diffusione *immaginaria* ( $D = i\hbar/2m$ ), quindi alcune proprietà del RBG valgono anche per il RBF (questo punto verrà precisato nella discussione seguente).

<sup>50</sup> Anche qui non ci preoccupiamo di normalizzare le distribuzioni di ampiezze. *A posteriori* si scopre (discutendo esempi fisici espliciti) che la corretta costante di normalizzazione nell'eq. (5.37) è proprio *uno*!

Sfruttando l'eq. (5.39), la forma esplicita di  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot)]$  segue direttamente dalle eq. (5.27) e (5.28) facendo uso delle eq.(3.41) e (3.37). Otteniamo

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot)] &= \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])) \cdot \\ &\exp \left\{ -(1/2m) \int_{t'}^{t''} dt \frac{\partial}{\partial x_i} \Omega_i(x, t) \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} \cdot \\ &\exp \left\{ -(i/\hbar) \int_{t'}^{t''} dt \left( \frac{1}{2m} \Omega_i(x, t) \Omega_i(x, t) + \Phi(x, t) \right) \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Concludiamo – grazie alle eq. (5.29), (3.19) e (5.39) – che il propagatore quantistico emerge qui come *media* sul RBF <sup>51</sup>

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \left\langle \langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot)] \right\rangle_{\eta}. \quad (5.41)$$

Inserendo l'eq. (5.40) nell'eq. (5.41) abbiamo esplicitamente

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \left\langle \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])) \cdot \right. \\ &\exp \left\{ -(1/2m) \int_{t'}^{t''} dt \frac{\partial}{\partial x_i} \Omega_i(x, t) \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} \cdot \\ &\left. \exp \left\{ -(i/\hbar) \int_{t'}^{t''} dt \left( \frac{1}{2m} \Omega_i(x, t) \Omega_i(x, t) + \Phi(x, t) \right) \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} \right\rangle_{\eta} \end{aligned} \quad (5.42)$$

che costituisce essenzialmente il nostro *risultato finale*: il *propagatore quantistico* espresso in termini delle *soluzioni dell'equazione di Langevin* (5.36). Tuttavia l'eq. (5.42) può venire semplificata un po' definendo

$$\Delta(t''; x', t'; [\eta(\cdot)]) \equiv \det \left| \frac{\partial}{\partial x'_j} \xi_i(t''; x', t'; [\eta(\cdot)]) \right|. \quad (5.43)$$

<sup>51</sup> L'operazione di media sul RBF è definita come nel caso del RBG, cioè dall'eq. (5.15) con  $P[\eta(\cdot)]$  sostituito ovviamente da  $A[\eta(\cdot)]$  e  $N = 1$ .

Un semplice calcolo dà <sup>52</sup>

$$\Delta(t''; x', t'; [\eta(\cdot)]) = \exp \left\{ -(1/m) \int_{t'}^{t''} dt \frac{\partial}{\partial x_i} \Omega_i(x, t) \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} \quad (5.44)$$

che permette di riscrivere l'eq. (5.42) nella forma

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= \left\langle \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])) \Delta(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])^{1/2} \right. \\ &\left. \exp \left\{ -(i/\hbar) \int_{t'}^{t''} dt \left( \frac{1}{2m} \Omega_i(x, t) \Omega_i(x, t) + \Phi(x, t) \right) \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} \right\rangle_{\eta}. \end{aligned} \quad (5.45)$$

È importante sottolineare che – benché l'eq. (5.45) sia stata dedotta in modo abbastanza convincente – gli argomenti che abbiamo usato sono essenzialmente *euristici*, per cui è necessario verificare (*a posteriori*) che l'eq. (5.45) fornisce *realmente* il propagatore dell'equazione di Schrödinger (naturalmente è stato dimostrato che le cose stanno effettivamente così).

Un vantaggio di questa formulazione è fornire la derivazione dell'approccio di Feynman in modo *quanto mai semplice* (è sufficiente seguire la stessa strategia sviluppata nel paragrafo precedente) <sup>53</sup>. Consideriamo quindi lo spazio dei cammini  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$  e fissiamo l'attenzione sull'ampiezza  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$  definita dall'eq. (2.34). È immediato esprimere questa ampiezza come *media* sul RBF (in cui compaiono le soluzioni dell'eq. (5.36)): basta infatti usare le eq. (3.53) e (5.39) per ottenere dall'eq. (5.32)

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] &= \left\langle \delta[x(t) - \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])]_{t'}^{t''} \right. \\ &\left. \langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot)] \right\rangle_{\eta}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

<sup>52</sup> Se nell'eq. (5.36) *non* comparisse il termine di rumore, l'eq. (5.44) manterrebbe la *stessa forma*: avremmo allora un risultato ben noto a chi si occupa di sistemi dinamici classici (si veda ad es.: R. Kurth, *Axiomatics of Classical Statistical Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1960)). Si può però dimostrare che l'eq. (5.44) vale *anche* in presenza di un *rumore additivo* (quale è il caso dell'eq. (5.36)).

<sup>53</sup> È anche possibile derivare l'equazione di Schrödinger partendo dall'equazione di Langevin in modo molto simile a come si ottiene l'equazione di Fokker-Planck secondo la strategia discussa da Zinn-Justin (si veda la nota 127).

Inoltre, se si inserisce nell'eq. (5.46) l'espressione di  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot)]$  data dall'eq. (5.40) è possibile calcolare *esplicitamente*  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$ . Si ritrova per questa via proprio quanto stabilito dal *postulato* F2. (Questo è un modo per *verificare* la correttezza dell'eq. (5.45)). Ancora, integrando l'eq. (5.46) su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ , si ha

$$\int \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] = \left\langle \langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot)] \right\rangle_{\eta} \quad (5.47)$$

dato che l'operazione di integrazione elimina  $\delta[\cdot \cdot \cdot]$  dal secondo membro dell'eq. (5.46). Infine l'eq. (2.37) – cioè il *postulato* F3 – emerge combinando l'eq. (5.47) con l'eq. (5.41).

Analogamente a quanto si ha nella descrizione di Langevin di un PSMC, anche le soluzioni dell'equazione di Langevin (5.36) sono *frattali* con dimensione di Hausdorff uguale a *due*<sup>54</sup>. Non stupisce che questa proprietà sia condivisa dai cammini di Feynman. Infatti le eq. (5.46) e (5.47) implicano che *i cammini di Feynman che congiungono  $(x', t')$  con  $(x'', t'')$  possono venire interpretati come soluzioni  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  che soddisfano la condizione  $\xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot)]) = x''!$*

Alternativamente, si può giungere a questo fondamentale risultato *definendo* una distribuzione di *ampiezza*  $A[\xi(\cdot)]$ <sup>55</sup> per le soluzioni dell'eq. (5.36) uscenti da  $(x', t')$  (considerando l'intervallo di tempo  $t' \leq t \leq t''$ ). La *forma esplicita* di  $A[\xi(\cdot)]$  può essere ottenuta – ancora una volta grazie all'eq. (3.1) – da  $P[\xi(\cdot)]$  data dall'eq. (5.35), usando la corrispondenza stabilita dalle eq. (3.39), (3.40) e (3.41) congiuntamente alle definizioni (3.35), (3.36) e (3.37). Ricordando l'ampiezza  $A[x(\cdot)]$  per i cammini di Feynman definita dall'eq. (2.35) e le eq. (2.33) e (2.36), si trova *proprio*  $A[\xi(\cdot)] = A[x(\cdot)]$ .

È evidente che l'eq. (5.36) – *senza* il termine di rumore – *non* possiede alcun significato specifico in meccanica classica. Ciò comporta che *non* vi sia alcuna *relazione* fra le soluzioni  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  e le traiettorie dinamiche classiche nello spazio delle configurazioni. Pertanto fra queste ultime ed i cammini di Feynman *non sussiste alcun legame* (come anticipato nel paragrafo 2.8) (si veda anche quanto verrà detto nel paragrafo 5.6).

**5.4** – Vogliamo mostrare che la formulazione della meccanica quantistica descritta nel paragrafo precedente può essere posta in una forma *alternativa*, che possiede un *legame molto stretto con la meccanica classica*.

Abbiamo considerato l'azione classica  $S[x(\cdot)]$  definita dall'eq. (2.33): ciò presuppone la scelta di un insieme di potenziali  $\mathcal{G} \equiv \{\Omega(x, t), \Phi(x, t)\}$ . Consideriamo ancora l'equazione di Hamilton-Jacobi associata a  $S[x(\cdot)]$

<sup>54</sup> Si possono ripetere qui le stesse considerazioni fatte nel paragrafo 5.2 per ottenere l'eq. (5.9).

<sup>55</sup> Unicamente per motivi tipografici, scriviamo qui semplicemente  $A[\xi(\cdot)]$  anziché più correttamente  $A[\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])]$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right)^2 + \Phi(x, t) = 0 \quad (5.48)$$

ed interpretiamo *ogni* sua soluzione  $S(x, t)$  come la generatrice di una trasformazione di gauge  $\mathcal{G} \rightarrow \bar{\mathcal{G}} \equiv \{\bar{\Omega}(x, t), \bar{\Phi}(x, t)\}$ <sup>56</sup>. Esplicitamente

$$\bar{\Omega}_i(x, t) \equiv \Omega_i(x, t) - \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t), \quad (5.49)$$

$$\bar{\Phi}(x, t) \equiv \Phi(x, t) + \frac{\partial}{\partial t} S(x, t). \quad (5.50)$$

Questa trasformazione induce nell'azione classica il cambiamento  $S[x(\cdot)] \rightarrow \bar{S}[x(\cdot)]$ , con

$$\bar{S}[x(\cdot)]_{t'}^{t''} \equiv S[x(\cdot)]_{t'}^{t''} - [S(x(t''), t'') - S(x(t'), t')]. \quad (5.51)$$

Corrispondentemente il propagatore quantistico associato a  $\bar{S}[x(\cdot)]$  è connesso a quello associato a  $S[x(\cdot)]$  dalla relazione<sup>57</sup>

$$\overline{\langle x'', t'' | x', t' \rangle} = e^{-(i/\hbar)[S(x'', t'') - S(x', t')]} \langle x'', t'' | x', t' \rangle. \quad (5.52)$$

Quantizziamo adesso l'azione classica  $\bar{S}[x(\cdot)]$  secondo lo schema del paragrafo precedente. L'equazione di Langevin (5.36) è ora

$$\frac{d}{dt} \bar{\xi}_i(t) = -\frac{1}{m} \bar{\Omega}_i(\bar{\xi}(t), t) + \eta_i(t) \quad (5.53)$$

che – in virtù dell'eq. (5.49) – può venire riscritta come

$$\frac{d}{dt} \bar{\xi}_i(t) = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \Big|_{x=\bar{\xi}(t)} + \eta_i(t). \quad (5.54)$$

<sup>56</sup> Ricordiamo che nel presente Quaderno ignoriamo (per semplicità) i problemi dovuti all'esistenza di *punti focali* e *caustiche* nello spazio delle configurazioni.

<sup>57</sup> Il modo più facile di derivare l'eq. (5.52) è di esprimere sia  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  che  $\overline{\langle x'', t'' | x', t' \rangle}$  in funzione di  $S[x(\cdot)]$  e  $\bar{S}[x(\cdot)]$  (rispettivamente) secondo l'eq. (2.31), paragonando poi i due risultati.

È proprio nella *differenza* fra le equazioni di Langevin (5.36) e (5.54) che consiste la *diversità* di questa formulazione rispetto a quella del paragrafo precedente. L'espressione (5.42) del propagatore quantistico diventa

$$\begin{aligned} \overline{\langle x'', t'' | x', t' \rangle} &= \left\langle \delta(x'' - \bar{\xi}(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])) \cdot \right. \\ &\exp \left\{ -(1/2m) \int_{t'}^{t''} dt \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\Omega}_i(x, t) \Big|_{x=\bar{\xi}(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} \cdot \\ &\left. \exp \left\{ -(i/\hbar) \int_{t'}^{t''} dt \left( \frac{1}{2m} \bar{\Omega}_i(x, t) \bar{\Omega}_i(x, t) + \bar{\Phi}(x, t) \right) \Big|_{x=\bar{\xi}(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\} \right\rangle_{\eta}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Ma le eq. (5.48), (5.49) e (5.50) implicano

$$\frac{1}{2m} \bar{\Omega}_i(x, t) \bar{\Omega}_i(x, t) + \bar{\Phi}(x, t) = 0. \quad (5.56)$$

Come in precedenza, definiamo

$$\bar{\Delta}(t''; x', t'; [\eta(\cdot)]) \equiv \det \left| \frac{\partial}{\partial x'_j} \bar{\xi}_i(t''; x', t'; [\eta(\cdot)]) \right| \quad (5.57)$$

ottenendo

$$\bar{\Delta}(t''; x', t'; [\eta(\cdot)]) = \exp \left\{ -(1/m) \int_{t'}^{t''} dt \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\Omega}_i(x, t) \Big|_{x=\bar{\xi}(t; x', t'; [\eta(\cdot)])} \right\}. \quad (5.58)$$

Grazie alle eq. (5.56) e (5.58), l'eq. (5.55) si semplifica notevolmente, assumendo la forma

$$\overline{\langle x'', t'' | x', t' \rangle} = \left\langle \delta(x'' - \bar{\xi}(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])) \bar{\Delta}(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])^{1/2} \right\rangle_{\eta}. \quad (5.59)$$

Paragonando infine l'eq. (5.59) all'eq. (5.52) otteniamo un'espressione *alternativa* per il propagatore quantistico associato all'*originaria* azione classica  $S[x(\cdot)]$  in cui compaiono *ora* le soluzioni dell'equazione di Langevin (5.54)



$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = e^{(i/\hbar)[S(x'', t'') - S(x', t')]}. \quad (5.60)$$

$$\left\langle \delta(x'' - \bar{\xi}(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])) \bar{\Delta}(t''; x', t'; [\eta(\cdot)])^{1/2} \right\rangle_{\eta}.$$

Sottolineiamo che quanto detto vale per un' *arbitraria* soluzione  $S(x, t)$  dell'equazione (5.48) <sup>58</sup>.

5.5 – La *formulazione a cammini aleatori* <sup>105</sup> della meccanica quantistica è stata ottenuta *di fatto* nel paragrafo 5.4. Tuttavia ci sembra opportuno riassumerne gli aspetti fondamentali seguendo un ordine logico.

Diversamente da quanto avviene nelle altre formulazioni della teoria quantistica, si assume *qui* come punto di partenza proprio la *meccanica classica* (approccio di Hamilton-Jacobi). Ricordiamo che, nel caso della particella  $S$  descritta dall'azione classica (2.33), l'equazione di Hamilton-Jacobi è

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right)^2 + \Phi(x, t) = 0. \quad (5.61)$$

Supponiamo di conoscere un integrale *particolare*  $S(x, t)$  dell'eq. (5.61). Allora la traiettoria dinamica classica  $q(t; x', t'; [S(\cdot)])$  *controllata* da  $S(x, t)$  è soluzione dell'equazione

$$\left. \frac{d}{dt} q_i(t) = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \right|_{x=q(t)}. \quad (5.62)$$

Ricordiamo anche che  $q(t; x', t'; [S(\cdot)])$  corrisponde alla condizione iniziale  $q(t') = x', p(t') = (\nabla S)(x', t')$ .

La *quantizzazione* si effettua trasformando l'eq. (5.62) in un' *equazione di Langevin*

$$\left. \frac{d}{dt} \xi_i(t) = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \right|_{x=\xi(t)} + \left( \frac{\hbar}{m} \right)^{1/2} \eta_i(t) \quad (5.63)$$

nella quale  $\eta(t)$  è un RBF definito dalla distribuzione di *ampiezza* <sup>132</sup>, <sup>59</sup>

<sup>58</sup> Infatti il secondo membro dell'eq. (5.60) è (globalmente) *indipendente* dalla scelta di  $S(x, t)$

<sup>59</sup> Si noti che le eq. (5.63) e (5.64) sono state riscritte in modo leggermente diverso (ma equivalente alle eq. (5.54) e (5.37)).

$$A[\eta(\cdot)] \sim \exp \left\{ (i/2) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \eta_i(t) \eta_i(t) \right\}. \quad (5.64)$$

È evidente che nel limite  $\hbar \rightarrow 0$  e/o  $m \rightarrow \infty$  si ritrova la meccanica classica. Ulteriormente il RBF possiede ora un significato *universale*<sup>60</sup>. Indichiamo con  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])$  la soluzione dell'eq. (5.63) con condizione iniziale  $\xi(t') = x'$  e controllata dall'integrale  $S(x, t)$  dell'eq. (5.61). Queste soluzioni descrivono i *cammini aleatori quantistici* (CAQ), che sono gli oggetti fondamentali su cui si basa la presente formulazione. È chiaro che i CAQ sono *frattali* con dimensione di Hausdorff uguale a *due*<sup>136</sup>. Abbiamo visto che è conveniente definire

$$\Delta(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)]) \equiv \det \left| \frac{\partial}{\partial x'_j} \xi_i(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)]) \right| \quad (5.65)$$

e sappiamo anche che vale la relazione

$$\begin{aligned} & \Delta(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)]) = \\ & \exp \left\{ (1/m) \int_{t'}^{t''} dt \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \Big|_{x=\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])} \right\}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Si tratta ora di esprimere il propagatore quantistico  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  in termini dei CAQ. La strategia che seguiremo consiste nell'analizzare l'evento  $A$  “ $S$  va da  $(x', t')$  a  $(x'', t'')$ ” facendo uso dei CAQ (anziché dei cammini di Feynman come nel paragrafo 2.4). Ma questo modo di procedere non è altro che l'*analogo quantistico* dell'analisi fatta per un simile evento nel caso di un PSMC al fine di ottenere  $P(x'', t'' | x', t')$  in termini delle soluzioni dell'equazione di Langevin. Ancora una volta l'eq. (3.1) e le sue forme più specifiche ci permettono di raggiungere il nostro obiettivo in modo quasi banale.

Ricordiamo che per un PSMC un concetto fondamentale è la *probabilità di transizione* (condizionata)  $P(x'', t'' | x', t') [\eta(\cdot)]$  lungo una soluzione  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  dell'equazione di Langevin (5.2)

---

<sup>60</sup> Con ciò intendiamo dire che il RBF è *completamente indipendente* dal sistema dinamico considerato.

$$P(x'', t'' | x', t')[\eta(\cdot)] \equiv \left( \begin{array}{l} \text{probabilità che } \Sigma \text{ vada da } (x', t') \\ \text{a } (x'', t'') \text{ lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \middle| \begin{array}{l} \Sigma \text{ si muove} \\ \text{lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)]) \end{array} \right). \quad (5.67)$$

È stato quindi dimostrato nel paragrafo 5.2 che  $P(x'', t'' | x', t')$  emerge come *media* di  $P(x'', t'' | x', t')[\eta(\cdot)]$  sul RBG

$$P(x'', t'' | x', t') = \left\langle P(x'', t'' | x', t')[\eta(\cdot)] \right\rangle_{\eta}. \quad (5.68)$$

Ritornando al caso quantistico, è naturale definire un' *ampiezza di transizione* (condizionata)  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle[\eta(\cdot), S(\cdot)]$  *lungo un (generico) CAQ*

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle[\eta(\cdot), S(\cdot)] \equiv \left( \begin{array}{l} \text{ampiezza che } \mathcal{S} \text{ vada da } (x', t') \text{ a } \\ (x'', t'') \text{ lungo } \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)]) \end{array} \middle| \begin{array}{l} \mathcal{S} \text{ si muove lungo} \\ \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)]) \end{array} \right). \quad (5.69)$$

È allora ovvio che l'eq. (3.1) implica

$$P(x'', t'' | x', t')[\eta(\cdot)] \longleftrightarrow \langle x'', t'' | x', t' \rangle[\eta(\cdot), S(\cdot)]. \quad (5.70)$$

Ma in virtù delle eq. (3.19) e (5.70) concludiamo dall'eq. (5.68) che il *propagatore quantistico* emerge qui come *media* di  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle[\eta(\cdot), S(\cdot)]$  sul RBF <sup>133</sup>

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle = \left\langle \langle x'', t'' | x', t' \rangle[\eta(\cdot), S(\cdot)] \right\rangle_{\eta}. \quad (5.71)$$

A questo punto è necessario specificare come  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle[\eta(\cdot), S(\cdot)]$  dipenda funzionalmente da  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])$ . Notiamo preliminarmente che la struttura di  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle[\eta(\cdot), S(\cdot)]$  è

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle[\eta(\cdot), S(\cdot)] = \\ \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])) \mathcal{A}[\eta(\cdot), S(\cdot)] \end{aligned} \quad (5.72)$$

in quanto – in virtù del suo significato fisico – essa deve essere nulla per  $\xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)]) \neq x''$ . Osserviamo che avremmo potuto derivare l'eq. (5.72) dall'eq. (5.28) usando l'eq. (5.70). Potremmo anche cercare di determinare per questa via la *forma esplicita* di  $\mathcal{A}[\eta(\cdot), S(\cdot)]$ , facendo uso

della corrispondenza definita dalle eq. (3.39), (3.40) e (3.41)<sup>61</sup>. Ci sembra tuttavia un fatto notevole che si possa pervenire a questa espressione in modo ancora più semplice e totalmente *diverso*. Supponiamo infatti di inserire l'eq. (5.72) nell'eq. (5.71). È evidente che  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot), S(\cdot)]$  dipende dal particolare integrale  $S(x, t)$  dell'eq. (5.61) che è stato scelto. Pertanto tale dipendenza dovrebbe manifestarsi *anche* nel propagatore quantistico. Ma ciò è *assurdo*:  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  dipende *solo* da  $(x', t')$  e  $(x'', t'')$ . Siamo quindi indotti a richiedere che la *media* di  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot), S(\cdot)]$  sul RBF *non* dipenda da  $S(x, t)$ <sup>62</sup>. Si può allora dimostrare che questo requisito determina *completamente*  $\mathcal{A}[\eta(\cdot), S(\cdot)]$ ! Otteniamo in tal modo

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot), S(\cdot)] &= e^{(i/\hbar)[S(x'', t'') - S(x', t')]}, \\ \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])) \Delta(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Basta ora inserire l'eq. (5.73) nell'eq. (5.71) per concludere che la *rappresentazione a cammini aleatori* del propagatore quantistico risulta essere

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle &= e^{(i/\hbar)[S(x'', t'') - S(x', t')]}, \\ \left\langle \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])) \Delta(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])^{1/2} \right\rangle_{\eta}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Questa espressione vale per un' *arbitraria* soluzione  $S(x, t)$  dell'equazione di Hamilton-Jacobi (5.61)<sup>140</sup>, conferendo così una notevole "flessibilità" alla presente formulazione<sup>63</sup>.

L'approccio di Feynman emerge in modo *molto semplice* nel presente contesto, e la discussione fatta a tale proposito nel paragrafo 5.3 può essere ripetuta qui alla lettera<sup>64</sup>. Ovviamente l'eq. (5.46) diventa ora

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] &= \left\langle \delta[x(t) - \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])]_{t'}^{t''} \right. \\ &\quad \left. \langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot), S(\cdot)] \right\rangle_{\eta} \end{aligned} \quad (5.75)$$

e similmente l'eq. (5.47) assume la forma

<sup>61</sup> Tuttavia questa strategia è ora meno immediata rispetto a quanto si è visto nel paragrafo 5.3.

<sup>62</sup> Ovviamente  $S(x, t)$  deve sempre soddisfare l'eq. (5.61).

<sup>63</sup> Quanto detto nella nota 55 circa la validità dell'eq. (2.52) vale *anche* per l'eq. (5.74).

<sup>64</sup> Vale anche qui l'affermazione fatta nella nota 135.

$$\int \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)] = \left\langle \langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot), S(\cdot)] \right\rangle_{\eta}. \quad (5.76)$$

Vediamo che il *postulato* F2 può essere derivato calcolando *esplicitamente*  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [x(\cdot)]$  in termini dei CAQ secondo l'eq. (5.75). (Per questa via si *verifica* anche la correttezza dell'eq. (5.74)). Ulteriormente il *postulato* F3 si ottiene combinando l'eq. (5.71) con l'eq. (5.76).

5.6 – Mostriamo ora che la *formulazione a cammini aleatori* della meccanica quantistica *chiarisce* la natura dei cammini di Feynman *generalizzati*.

Probabilmente il lettore sarà meravigliato dal fatto che abbiamo interrotto la discussione del paragrafo precedente proprio quando eravamo sul punto di fare delle affermazioni sulla relazione fra cammini di Feynman e CAQ, nello spirito dell'analisi basata sulle eq. (5.46) e (5.47) (fine del paragrafo 5.3). Il motivo è semplice: un tale risultato *non* sarebbe *corretto*! A causa del fattore esponenziale *indipendente dal rumore* presente nell'eq. (5.73) sarebbe infatti *errato* trarre conclusioni simili dalle eq. (5.75) e (5.76)<sup>65</sup>.

Una maniera piuttosto ovvia di evitare questa difficoltà consiste nel considerare – al posto di  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle [\eta(\cdot), S(\cdot)]$  – la *nuova* ampiezza

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle_* [\eta(\cdot), S(\cdot)] \equiv \delta(x'' - \xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])) \cdot \Delta(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])^{1/2}. \quad (5.77)$$

Corrispondentemente definiamo su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$  una *nuova* ampiezza nel modo seguente

$$\langle x'', t'' | x', t' \rangle_* [x(\cdot)] \equiv \left\langle \delta[x(t) - \xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])]_{t'}^{t''} \cdot \langle x'', t'' | x', t' \rangle_* [\eta(\cdot), S(\cdot)] \right\rangle_{\eta}. \quad (5.78)$$

L'analogia fra le eq. (5.75) e (5.78) è evidente. Procediamo quindi integrando l'eq. (5.78) su  $\mathcal{C}(x', t'; x'', t'')$ . Analogamente a quanto già visto, otteniamo

---

<sup>65</sup> La connessione fra cammini di Feynman e soluzioni dell'eq. (5.36) ricavata dalle eq. (5.46) e (5.47) è *corretta* proprio perché *sia* sotto il segno di *integrazione* nel primo membro dell'eq. (5.47) *che* sotto il segno di *media* nel secondo membro *non* compaiono funzioni *banali* rispetto a *tali* operazioni. Ora invece sotto il segno di *media* nel secondo membro dell'eq. (5.76) è presente un esponenziale *indipendente dal rumore*, in virtù dell'eq. (5.73).

$$\int \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle_* [x(\cdot)] = \left\langle \langle x'', t'' | x', t' \rangle_* [\eta(\cdot), S(\cdot)] \right\rangle_{\eta}. \quad (5.79)$$

Ci siamo ricondotti in tal modo alla situazione discussa nel paragrafo 5.3 (si vedano la eq. (5.46) e (5.47)).

Osserviamo che è possibile calcolare *esplicitamente*  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle_* [x(\cdot)]$  inserendo l'eq. (5.77) nell'eq. (5.78). Con alcune manipolazioni formali (peraltro abbastanza standard) si trova

$$\begin{aligned} \langle x'', t'' | x', t' \rangle_* [x(\cdot)] &= \delta(x'' - x(t'')) \delta(x' - x(t')). \\ \exp \left\{ (i/\hbar)(m/2) \int_{t'}^{t''} dt \left[ \dot{x}_i(t) - \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \right] \Big|_{x=x(t)} \right\}^2 & \end{aligned} \quad (5.80)$$

ma ciò implica

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}x(t) \langle x'', t'' | x', t' \rangle_* [x(\cdot)] &= \int \mathcal{D}x(t) \delta(x'' - x(t'')) \delta(x' - x(t')). \\ \exp \left\{ (i/\hbar)(m/2) \int_{t'}^{t''} dt \left[ \dot{x}_i(t) - \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \right] \Big|_{x=x(t)} \right\}^2 & \end{aligned} \quad (5.81)$$

Ricordando l'eq. (2.52) vediamo – grazie all'eq. (5.81) – che i cammini che contribuiscono *effettivamente* nell'integrale a primo membro dell'eq. (5.79) sono proprio i *cammini di Feynman generalizzati* definiti nel paragrafo 2.8. Giungiamo così (sulla base delle eq. (5.78) e (5.79)) alla conclusione: *i cammini di Feynman generalizzati controllati da  $S(x, t)$  che congiungono  $(x', t')$  con  $(x'', t'')$  possono venire interpretati come CAQ  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])$  soddisfacenti alla condizione  $\xi(t''; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)]) = x''$* <sup>66</sup>.

<sup>66</sup> Avevamo osservato (paragrafo 3.9) che *non* esistono cammini di Wiener *generalizzati*. Ora il motivo di tale affermazione dovrebbe essere chiaro. Infatti, se essi esistessero, dovrebbero essere interpretabili come soluzioni di un'equazione di Langevin *diversa* dall'eq. (5.2) ma *fisicamente* equivalente ad essa. A differenza del potenziale vettore  $\Omega(x, t)$  che compare nell'eq. (5.36), la drift  $V(x, t)$  che figura nell'eq. (5.2) è una grandezza *osservabile*: ciò preclude la possibilità di effettuare su di essa trasformazioni simili all'eq. (5.49) *senza* alterare le descrizioni fisiche. Questa circostanza è conseguenza del fatto che – in assenza di fluttuazioni – un PSMC ubbidisce ad una dinamica *aristotelica* anziché *newtoniana* (si ricordi l'eq. (3.22)).

Avevamo concluso nel paragrafo 5.3 che *non* sussiste alcun legame fra cammini di Feynman e traiettorie dinamiche classiche nello spazio delle configurazioni. D'altra parte, la rappresentazione del propagatore quantistico presentata nel paragrafo 2.8 suggerisce che per i cammini di Feynman *generalizzati* le cose vadano diversamente. Siamo ora in grado di discutere compiutamente questo punto. Contrariamente a quanto si ha per l'eq. (5.36), l'eq. (5.63) – *senza* il termine di rumore – possiede un profondo significato in meccanica classica, in quanto essa coincide con l'eq. (5.62). Ciò comporta che l'insieme dei CAQ  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])$  controllati da  $S(x, t)$  nasca dalla traiettoria dinamica classica  $q(t; x', t'; [S(\cdot)])$  per effetto del termine di RBF presente nell'eq. (5.63). Quest'ultimo è la sorgente degli effetti quantistici, che si manifestano nella proprietà  $\Delta\xi(t) \sim (\Delta t)^{1/2}$ . Pertanto *i CAQ controllati da  $S(x, t)$  appaiono come curve fluttuanti intorno a  $q(t; x', t'; [S(\cdot)])$* . Combinando questo risultato con quanto ottenuto sopra abbiamo che *i cammini di Feynman generalizzati controllati da  $S(x, t)$  possono essere visti – in modo completamente naturale – come curve fluttuanti intorno alla traiettoria dinamica classica  $q(t; x', t'; [S(\cdot)])$* . Questo legame – già sospettato nel paragrafo 2.8 – ha una notevole rilevanza concettuale, perché mostra che la teoria quantistica possiede una *radice classica* più profonda di quanto appaia dalla formulazione operatoriale (ritorneremo su questo punto nel paragrafo successivo).

Vogliamo concludere questo paragrafo osservando che abbiamo verificato implicitamente che l'eq. (5.74) fornisce *effettivamente* il propagatore quantistico. Al fine di rendere *esplicito* questo argomento, combiniamo dapprima l'eq. (5.79) con l'eq. (5.81), moltiplicando poi per  $\exp\{(i/\hbar)[S(x'', t'') - S(x', t')]\}$  ambo i membri dell'equazione ottenuta. Un membro di quest'ultima equazione risulta essere – grazie all'eq. (2.52) – proprio  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$ , mentre l'altro membro coincide – in virtù dell'eq. (5.77) – col secondo membro dell'eq. (5.74).

**5.7** – Benché la discussione presentata negli ultimi quattro paragrafi abbia un carattere essenzialmente formale, l'approccio a cammini aleatori offre una rappresentazione *intuitiva* della meccanica quantistica, che ci sembra molto semplice e suggestiva.

Ancora una volta l'analogia con i PSMC è illuminante. Abbiamo visto che il RBG descrive *fluttuazioni classiche di fondo*. Possiamo citare, come esempio, il caso del moto browniano macroscopico<sup>67</sup>, nel quale tali fluttuazioni sono le ben note *fluttuazioni termiche* dell'ambiente. Ritornando al caso generale, le fluttuazioni (classiche) di fondo modificano il comportamento deterministico della particella  $\Sigma$  (che “materializza” il PSMC considerato): una

---

<sup>67</sup> Tutti i PSMC considerati nel presente Quaderno sono definiti nello spazio delle *configurazioni*. Quindi intendiamo in realtà il moto browniano macroscopico nell'*approssimazione di Einstein-Smoluchowski* (si ricordi la nota 75).

*singola* traiettoria  $q(t; x', t')$  – ottenuta ignorando l'esistenza della fluttuazioni di fondo – è sostituita da una *famiglia* di traiettorie aleatorie  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$  (una per ogni possibile configurazione  $\eta(t)$  del RBG). Abbiamo anche notato che queste traiettorie descrivono le *alternative disgiunte* associate all'evento  $B$  “ $\Sigma$  va da  $(x', t')$  a  $(x'', t'')$ ”. E con argomenti probabilistici la *probabilità di transizione*  $P(x'', t'' | x', t')$  è stata derivata come media sul RBG in cui compaiono le traiettorie aleatorie  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot)])$ . Ma c'è un punto che vogliamo sottolineare (vedremo in seguito che esso ci permetterà di chiarire alcuni aspetti della teoria quantistica). Al fine di tener conto dell'effetto delle fluttuazioni su  $\Sigma$ , la dinamica *intrinseca* del sistema *non* è stata modificata. Si è supposto invece che la *stessa* dinamica – che è deterministica quando la si considera nel “vuoto” – avvenga in realtà in un ambiente in cui sono presenti fluttuazioni classiche di fondo.

Seguendo l'analogia con quanto appena visto, ci sembra molto suggestivo immaginare che il RBF descriva *fluttuazioni quantistiche di fondo* (che *non* interferiscono con alcun effetto deterministico). Supponiamo naturalmente che questo *nuovo* tipo di fluttuazioni *universali*<sup>68</sup> modifichi il comportamento deterministico della particella  $\mathcal{S}$ . Esplicitamente, ciò significa che una generica traiettoria dinamica classica  $q(t; x', t'; [S(\cdot)])$  viene sostituita – in presenza delle fluttuazioni quantistiche di fondo – da una famiglia di CAQ  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])$  (uno per ogni possibile configurazione  $\eta(t)$  del RBF). A questo punto è naturale supporre che i CAQ  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])$  descrivano le *alternative disgiunte* associate all'evento  $A$  “ $\mathcal{S}$  va da  $(x', t')$  a  $(x'', t'')$ ”. Allora – procedendo parallelamente a quanto è stato fatto per i PSMC – si ottiene il *propagatore quantistico*  $\langle x'', t'' | x', t' \rangle$  come media sul RBF in cui compaiono i CAQ  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])$ . Vediamo quindi che gli *usuali* effetti quantistici nel comportamento di  $\mathcal{S}$  nascono dalla combinazione delle fluttuazioni quantistiche di fondo con la dinamica classica.

Viene spontaneo chiedersi quale soluzione  $S(x, t)$  dell'equazione di Hamilton-Jacobi debba essere usata per controllare i CAQ  $\xi(t; x', t'; [\eta(\cdot), S(\cdot)])$ . Come è stato discusso nel paragrafo 5.5, il risultato finale è *indipendente* da questa scelta. Ma ciò implica che i CAQ abbiano unicamente un significato *matematico*. Non ci si deve meravigliare di questa circostanza: analogamente a quanto avviene per i cammini di Feynman, *non* esiste alcuna distribuzione *classica* di *probabilità* per i CAQ, che quindi *non* sarebbero *comunque* interpretabili come traiettorie seguite da  $\mathcal{S}$  in senso *classico*<sup>69</sup>. Ciò nonostante, ragionare in termini di CAQ è stato molto utile sul piano *euristico*: ci ha

<sup>68</sup> *Universali* nel senso che esse sono *completamente indipendenti* dal sistema dinamico che si considera. Questa proprietà segue direttamente dall'eq. (5.64) (si tenga conto della nota 142).

<sup>69</sup> Infatti l'eq. (5.69) definisce una distribuzione di *ampiezza* sui CAQ. Ragionando in modo simile a come è stato fatto nel paragrafo 2.5 per i cammini di Feynman, è facile convincersi della correttezza di quanto affermato.



permesso di ottenere una nuova formulazione della meccanica quantistica <sup>70</sup>.

Vogliamo mostrare ora come la circostanza che i CAQ siano curve fluttuanti intorno ad una traiettoria dinamica classica (nel senso spiegato nel paragrafo precedente) ponga la relazione fra meccanica classica e quantistica in una *nuova* prospettiva.

Ricordando quanto è stato osservato a proposito della descrizione di Langevin di un PSMC (fine della discussione dei PSMC contenuta in questo paragrafo), siamo indotti ad affermare che la dinamica quantistica *non è intrinsecamente diversa* da quella classica. È facile capire il perché. Lo scenario che emerge in modo *naturale* dalla formulazione a cammini aleatori è che  $\mathcal{S}$  ubbidisce *sempre* alla *stessa* dinamica, definita dalle eq. (5.61) e (5.62). Evidentemente – quando questa dinamica ha luogo nello spazio “vuoto” – il comportamento di  $\mathcal{S}$  è deterministico e si ottiene la meccanica classica. Ma questa situazione risulta essere soltanto un’*approssimazione*. Al fine di ottenere una descrizione più accurata è necessario supporre che nell’ambiente siano presenti *fluttuazioni quantistiche di fondo*. A causa di tali fluttuazioni, l’eq. (5.62) viene *modificata* e va sostituita con l’eq. (5.63) – proprio come nel caso dei PSMC – mentre l’eq. (5.61) resta *inalterata*. Ed il fatto che le eq. (5.62) e (5.63) differiscano *soltanto* per l’aggiunta del RBF *implica* quanto affermato sopra. Possiamo schematizzare tutto ciò nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \text{DINAMICA QUANTISTICA} &= \text{DINAMICA CLASSICA} + \\ &\text{FLUTTUAZIONI QUANTISTICHE DI FONDO.} \end{aligned} \quad (5.82)$$

Questo scenario fornisce una rappresentazione *intuitiva* della teoria quantistica, che ha, se non altro, il pregio della semplicità. Esso mostra anche in modo *esplicito* come la meccanica classica debba essere *modificata* per ottenere la meccanica quantistica, *senza* che sia necessario introdurre vettori di stato ed operatori. Resta da vedere se la schematizzazione (5.82) fornisce una comprensione *più profonda* della natura stessa della quantizzazione.

È però opinione comune che la dinamica quantistica sia *intrinsecamente diversa* da quella classica! Vediamone il motivo. Se si pone

$$\psi(x, t) \equiv \tilde{P}(x, t)^{1/2} e^{(i/\hbar)\tilde{S}(x, t)} \quad (5.83)$$

nell’equazione di Schrödinger

---

<sup>70</sup> In realtà, i CAQ sono *concettualmente* sullo *stesso* piano dei cammini di Feynman (ciò vale naturalmente anche per i cammini di Feynman *generalizzati*).

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{1}{2m} \left( -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - \Omega_i(x, t) \right) \cdot \left( -i \hbar \frac{\partial}{\partial x_i} - \Omega_i(x, t) \right) \psi(x, t) + \Phi(x, t) \psi(x, t) \quad (5.84)$$

questa diventa *equivalente* alla coppia di equazioni <sup>71</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{S}(x, t) + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{S}(x, t) - \Omega_i(x, t) \right)^2 + \Phi(x, t) + V_Q(x, t) = 0, \quad (5.85)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{P}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{S}(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \tilde{P}(x, t) \right] = 0, \quad (5.86)$$

in cui  $V_Q(x, t)$  è il cosiddetto *potenziale quantistico* <sup>72</sup>

$$V_Q(x, t) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \tilde{P}(x, t)^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{P}(x, t)^{1/2}. \quad (5.87)$$

Sappiamo peraltro che la meccanica *classica* può essere espressa dalla coppia di equazioni

$$\frac{\partial}{\partial t} S(x, t) + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right)^2 + \Phi(x, t) = 0, \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) P(x, t) \right] = 0, \quad (5.89)$$

in quanto l'eq. (5.89) è matematicamente *equivalente* all'equazione

$$\frac{d}{dt} q_i(t) = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} S(x, t) - \Omega_i(x, t) \right) \Big|_{x=q(t)} \quad (5.90)$$

che si ottiene ponendo  $P(x, t) = \delta(x - q(t))$  <sup>73</sup>. È evidente che le eq. (5.86) e (5.89) coincidono formalmente, mentre l'equazione *quantistica* di Hamilton-Jacobi (5.85) differisce da quella classica (5.88) per la presenza di  $V_Q(x, t)$ .

<sup>71</sup> Questa circostanza è stata notata per la prima volta in: E. Madelung, Zeit. Phys. **40**, 322 (1926).

<sup>72</sup> D. Bohm, Phys. Rev. **85**, 166 (1952).

<sup>73</sup> Naturalmente  $P(x, t)$  è la distribuzione (classica) di probabilità sullo spazio delle configurazioni di  $\mathcal{S}$  (si tenga presente quanto osservato nella nota 79).

Ciò implica che (in questo contesto) la *differenza* fra dinamica classica e quantistica è dovuta unicamente a  $V_Q(x, t)$  nell'eq. (5.85)<sup>74</sup>. Ma  $V_Q(x, t)$  dipende dallo stato dinamico di  $S$  (in virtù dell'eq. (5.87)), quindi la dinamica quantistica differisce *intrinsecamente* da quella classica.

Non ci nascondiamo che, a questo punto, il lettore (che ci abbia seguito fin qui!) possa provare un certo senso di disagio, e per diversi motivi. Quanto appena visto sembra essere in contraddizione con ciò che è schematizzato dall'eq. (5.82). Non solo, ma la formulazione a cammini aleatori pretende di descrivere la dinamica *quantistica* facendo uso di un'equazione di Hamilton-Jacobi *classica*; però dalle eq. (5.85) e (5.88) segue che tale equazione *non* sembra essere valida in meccanica *quantistica*. Ed infine, abbiamo introdotto il concetto di fluttuazioni quantistiche senza preoccuparci di discutere il loro significato fisico.

È un fatto notevole che l'eq. (5.61) – se usata per controllare i CAQ attraverso l'eq. (5.63) – è perfettamente *consistente* con l'eq. (5.85). Al fine di comprendere come ciò sia possibile è conveniente considerare l'eq. (5.74). Se indichiamo con  $\tilde{S}(x, t)$  la *fase* di  $\langle x, t | x', t' \rangle$ , è evidente che si ha<sup>75</sup>

$$\tilde{S}(x, t) = S(x, t) + S_{QC}(x, t) \quad (5.91)$$

ove  $S_{QC}(x, t)$  è la *fase* dell'espressione  $\langle \dots \rangle_\eta$ . Sappiamo che  $\tilde{S}(x, t)$  soddisfa l'eq. (5.85), mentre  $S(x, t)$  è soluzione dell'eq. (5.61). Pertanto la comparsa di  $V_Q(x, t)$  nell'eq. (5.85) può essere vista qui come una *conseguenza* della presenza di  $S_{QC}(x, t)$  nell'eq. (5.91) – si noti che  $S_{QC}(x, t) \neq 0$  perché la distribuzione di ampiezza  $A[\eta(\cdot)]$  per il RBF è una grandezza *complessa*<sup>76</sup>. Concludiamo che la differenza fra le eq. (5.61) e (5.85) – cioè la correzione quantistica  $V_Q(x, t)$  – nasce proprio dal fatto che l'evoluzione dinamica classica è perturbata dalle fluttuazioni quantistiche di fondo. Si osservi che ritroviamo per questa via proprio l'eq. (5.82) (ciò prova la sua consistenza con l'eq. (5.85)).

Ma allora, la dinamica quantistica è *intrinsecamente* diversa da quelle classica oppure no?

<sup>74</sup> L'uso del *potenziale quantistico* per discutere alcuni problemi concettuali della meccanica quantistica è stato suggerito da L. De Broglie (si veda il Quaderno di Fisica Teorica: S. Boffi, *Onde di Materia e Onde di Probabilità* (1989)). Questa strategia è stata sviluppata successivamente da D. Bohm e J. S. Bell: D. Bohm, B. J. Hiley and P. N. Kaloyerou, Phys. Rep. **144**, 321 (1987); J. S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

<sup>75</sup> Omettiamo per semplicità la dipendenza dalle variabili  $x', t'$  perché irrilevante in questa discussione.

<sup>76</sup> È gratificante constatare che, se avessimo cercato di simulare le fluttuazioni quantistiche di fondo con un RBG, avremmo ottenuto  $S_{QC}(x, t) = 0$ . Ciò implica che *non* si avrebbe alcuna correzione quantistica alla dinamica classica!

È un merito della formulazione a cammini aleatori mostrare l'*intrinseca identità* delle due dinamiche. Si noti che questa circostanza è proprio la *controparte quantistica* del fatto che la dinamica *intrinseca* di un PSMC *non* è alterata dalla presenza delle fluttuazioni classiche di fondo. La situazione *sembra* essere diversa se si ragiona nell'ambito della formulazione di Schrödinger, nella quale ci si limita a considerare *soltanto* l'effetto *medio* delle fluttuazioni quantistiche di fondo sulla distribuzione di ampiezza  $\psi(x, t)$  (funzione d'onda). Infatti – non essendoci più variabili del RBF in gioco – l'*unico* modo in cui le fluttuazioni quantistiche di fondo possono modificare l'evoluzione temporale classica di  $\psi(x, t)$  è attraverso un termine che *coinvolge*  $\psi(x, t)$  stessa. Ma ciò significa che la correzione quantistica *dipende* dallo *stato* dinamico di  $\mathcal{S}$ , suggerendo così *apparentemente* che la dinamica quantistica sia *intrinsecamente* diversa da quella classica<sup>77</sup>. Si può giungere alla *stessa* conclusione anche sfruttando (ancora!) l'analogia con i PSMC (in particolare l'analogia fra equazione di Schrödinger ed equazione di Fokker-Planck). Se si paragona l'equazione di Fokker-Planck (3.20) all'eq. (3.24) si è indotti a pensare che le fluttuazioni classiche di fondo alterino in modo *intrinseco* la dinamica del processo. Ma sappiamo che ciò è *falso*: il termine diffusivo nell'eq. (3.20) rappresenta *soltanto* l'effetto *medio* delle fluttuazioni classiche di fondo sulla distribuzione di probabilità  $P(x, t)$ .

Osserviamo infine che le fluttuazioni quantistiche di fondo sono state introdotte sulla base dell'analogia *formale* fra meccanica quantistica e teoria dei processi stocastici classici. È spontaneo chiedersi se esse abbiano un significato *fisico*. Purtroppo, non sappiamo rispondere a questa domanda! Osserviamo però che la formulazione a cammini aleatori e quanto esposto in questo paragrafo sono *indipendenti* dall'*interpretazione* delle fluttuazioni quantistiche di fondo<sup>78</sup>.

Concludendo questo Quaderno ci vengono alla mente le parole finali del libro di H. Weyl, *Space, Time and Matter* (Dover, New York, 1922), ma un minimo di modestia ci suggerisce di parlare sottovoce!

## §6. Bibliografia

Completiamo questo Quaderno con una bibliografia dei principali argomenti che sono stati considerati. Pensiamo di fare cosa utile al lettore indicando

<sup>77</sup> Grazie all'equivalenza fra l'eq. (5.84) e le due eq. (5.85) e (5.86), è possibile ragionare in termini della coppia di funzioni  $\tilde{P}(x, t)$ ,  $\tilde{S}(x, t)$  anziché di  $\psi(x, t)$ . In questo modo il ragionamento appena fatto diventa più chiaro.

<sup>78</sup> Anche se risulta impossibile attribuire un significato *fisico* a tali fluttuazioni, esse sono pur sempre un utile espediente matematico per quantizzare un sistema dinamico classico (in questo caso *non* ci sarebbe alcuna *differenza* fra fluttuazioni quantistiche di fondo e RBF). Sottolineiamo che l'essere riusciti a schematizzare la dinamica quantistica secondo l'eq. (5.82) ci sembra un fatto notevole, che chiarisce la struttura concettuale della teoria quantistica *indipendentemente* dall'interpretazione delle fluttuazioni quantistiche di fondo.

con una, due e tre stelle il grado di difficoltà *matematica* di ogni testo (facile, medio e difficile per un laureato in Fisica). Anche se questo criterio è inevitabilmente soggettivo, ci sembra che esso sia sufficientemente orientativo.

### 6.1 – *Integrali di Feynman in meccanica quantistica*

I. M. Gel'fand and A. M. Yaglom, *Integration in Function Space and Its Application in Quantum Physics*, J. Math. Phys. **1**, 48 (1960) \*\*\*.

R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (Mc Graw-Hill, New York, 1965) \*.

A. Katz, *Classical Mechanics, Quantum Mechanics, Field Theory* (Academic Press, New York, 1965) \*\*.

G. Rosen, *Formulation of Classical and Quantum Dynamical Theories* (Academic Press, New York, 1969) \*\*.

M. V. Berry and K. E. Mount, *Semiclassical Approximations in Wave Mechanics*, Rep. Prog. Phys. **35**, 315 (1972) \*\*.

J. B. Keller and D. W. McLaughlin, *The Feynman Integral*, Am. Math. Monthly **82**, 451 (1975) \*\*.

T. Köling and R. A. Malfliet, *Semiclassical Approximation to Heavy Ion Scattering Based on the Feynman Path Integral Method*, Phys. Rep. **22**, 181 (1975) \*.

W. J. Miller, *Classical Limit Quantum Mechanics*, J. Chem. Phys. **63**, 996 (1975) \*.

S. A. Albeverio and R. J. Hoegh-Krohn, *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals* (Springer, Berlin, 1976) \*\*\*.

C. De Witt-Morette, A. Maheswari and B. Nelson, *Path Integration in Non Relativistic Quantum Mechanics*, Phys. Rep. **50**, 225 (1979) \*\*\*.

B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics* (Academic Press, New York, 1979) \*\*\*.

M. S. Marinov, *Path Integrals in Quantum Theory: An Outlook of Basic Concepts*, Phys. Rep. **60**, 1 (1980) \*\*.

B. Felsager, *Geometry, Particles and Fields* (Odense University Press, Odense, 1981) \*\*.

L. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, New York, 1981) \*\*.

B. Sakita, *Quantum Theory of Many-Variable Systems and Fields* (World Scientific, Singapore, 1985) \*\*.

K. C. Khandekar and S. V. Lawande, *Feynman Path Integrals: Some Exact Results and Applications*, Phys. Rep. **137**, 115 (1986) \*\*.

R. Cenni, E. Galleani D'Agliano, F. Napoli, P. Saracco and M. Sassetti, *Feynman Integrals in Theoretical, Nuclear and Statistical Physics* (Bibliopolis, Napoli, 1989) \*.

M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1990) \*.

### 6.2 – Integrali di Feynman in meccanica statistica

I. M. Gel'fand and A. M. Yaglom, *Integration in Function Space and Its Application in Quantum Physics*, J. Math. Phys. **1**, 48 (1960) \*\*\*.

S. G. Brush, *Functional Integrals and Statistical Physics*, Rev Mod. Phys. **33**, 79 (1961) \*\*.

R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (Mc Graw-Hill, New York, 1965) \*.

R. P. Feynman, *Statistical Mechanics* (Benjamin, London, 1972) \*\*.

F. W. Wiegel, *Path Integral Methods in Statistical Mechanics*, Phys. Rep. **16**, 57 (1975) \*\*.

V. N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Reidel, Dordrecht, 1983) \*\*.

D. Amit, *Field Theory, Renormalization Group and Critical Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1984) \*\*.

F. W. Wiegel, *Introduction to Path Integral Methods in Physics and Polymer Science* (World Scientific, Singapore, 1986) \*.

J. W. Negele and H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems* (Addison-Wesley, New York, 1987) \*\*.

G. Parisi, *Statistical Field Theory* (Addison-Wesley, Reading, 1988) \*\*.

R. Cenni, E. Galleani D'Agliano, F. Napoli, P. Saracco and M. Sassetti, *Feynman Integrals in Theoretical, Nuclear and Statistical Physics* (Bibliopolis, Napoli, 1989) \*.

J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1989) \*\*.

### 6.3 – Integrali di Feynman in teoria quantistica dei campi

E. S. Abers and B. W. Lee, *Gauge Theories*, Phys. Rep. **9**, 1 (1973) \*\*.

- W. Marciano and H. Pagels, *Quantum Chromodynamics*, Phys. Rep. **36**, 137 (1978) \*\*.
- L. Faddeev and A. A. Slavnov, *Gauge Fields* (Benjamin, Reading, 1980) \*\*.
- C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980) \*\*.
- T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, (Harwood, New York, 1981) \*\*.
- K. Huang, *Quarks, Leptons and Gauge Fields* (World Scientific, Singapore, 1982) \*\*.
- R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland, Amsterdam, 1982) \*\*.
- V. N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Reidel, Dordrecht, 1983) \*\*.
- D. Amit, *Field Theory, Renormalization Group and Critical Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1984) \*\*.
- L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985) \*\*.
- B. Sakita, *Quantum Theory of Many-Variable Systems and Fields* (World Scientific, Singapore, 1985) \*\*.
- D. Bailin and A. Love, *Introduction to Gauge Field Theory* (Adam Hilger, Bristol, 1986) \*\*.
- J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View* (Springer, Berlin, 1987) \*\*\*.
- T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics* (World Scientific, Singapore, 1987) \*\*.
- S. Pokorski, *Gauge Field Theories* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987) \*\*.
- A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings* (Harwood, New York, 1987) \*\*\*.
- R. J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987) \*\*.
- G. Parisi, *Statistical Field Theory* (Addison-Wesley, Reading, 1988) \*\*.
- P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (Addison-Wesley, Reading, 1989) \*\*.
- J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Clarendon Press, Oxford, 1989) \*\*.

6.4 – *Proceedings di conferenze sull'integrale di Feynman*

*Analysis in Function Space*, ed. by W. T. Martin and I. Segal (MIT Press, Cambridge Mass., 1964).

*Functional Integration and Its Applications*, ed. by A. M. Arthurs (Clarendon Press, Oxford, 1975).

*Path Integrals and Their Applications in Quantum, Statistical and Solid State Physics*, ed. by G. J. Papadopoulos and J. T. Devreese (Plenum, New York, 1978).

*Feynman Path Integrals*, ed. by S. Albeverio et al. (Springer, Berlin 1979).

*Functional Integration: Theory and Applications*, ed. by J. P. Antoine and E. Tirapegui (Plenum, New York, 1980).

*Path Integrals: from meV to MeV*, ed. by M. C. Gutzwiller, A. Inomata, J. R. Klauder and L. Streit (World Scientific, Singapore, 1986).

*Path Summation: Achievements and Goals*, ed. by S. Lundqvist, A. Ranfagni, V. Sa-Yakanit and L. S. Schulman (World Scientific, Singapore, 1988).

*Feynman's Quantum Mechanics 40 Years after Its Proposal*, ed. by A. Ranfagni, D. Mugnai, P. Moretti and M. Cetica, *Nuovo Cimento* **11D**, 1-350 (1989).

6.5 – *Teoria dei processi stocastici (classici)*

J. Doob, *Stochastic Processes* (Wiley, New York, 1953) \*\*\*.

*Noise and Stochastic Processes*, ed. by N. Wax (Dover, New York, 1954) \*\*.

M. Kac, *Probability and Related Topics in Physical Sciences* (Interscience, London, 1959) \*\*.

I. M. Gel'fand and A. M. Yaglom, *Integration in Function Space and Its Application in Quantum Physics*, *J. Math. Phys.* **1**, 48 (1960) \*\*\*.

W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications I and II* (Wiley, New York, 1961) \*\*.

E. Dynkin, *Markov Processes* (Springer, Berlin, 1965) \*\*\*.

K. Itô and H. McKean, *Diffusion Processes and Their Sample Paths* (Springer, Berlin, 1965) \*\*\*.

M. Kac, *Wiener and Integration in Function Space*, *Bull. Am. Math. Soc.* **72**, 52 (1966) \*\*.



- E. Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion* (Princeton University Press, Princeton, 1967) \*\*\*.
- R. L. Stratonovich, *Topics in the Theory of Random Noise* (Gordon and Breach, New York, 1967) \*\*.
- I. I. Gihman and A. V. Skorohod, *Introduction to the Theory of Random Processes* (Sounders, Philadelphia, 1969) \*\*\*.
- H. P. McKean, *Stochastic Integrals* (Academic Press, New York, 1969) \*\*\*.
- B. De Finetti, *Teoria della Probabilità*, vol. 1 e 2 (Einaudi, Torino, 1970) \*\*.
- D. Freedman, *Brownian Motion and Diffusion* (Holden-Day, San Francisco, 1971) \*\*\*.
- I. I. Gihman and A. V. Skorohod, *Stochastic Differential Equations* (Springer, Berlin, 1972) \*\*\*.
- L. Arnold, *Stochastic Differential Equations* (Wiley, New York, 1973) \*\*\*.
- A. Papoulis, *Probabilità, Variabili Aleatorie e Processi Stocastici* (Boringhieri, Torino, 1973) \*.
- I. I. Gihman and A. V. Skorohod, *The Theory of Stochastic Processes*, vol. 1, 2 and 3 (Springer, Berlin, 1974/1975/1979) \*\*\*.
- A. Friedman, *Stochastic Differential Equations and Applications* (Academic Press, New York, 1975) \*\*\*.
- N. G. Van Kampen, *Stochastic Differential Equations*, Phys. Rep. **24**, 171 (1976) \*\*.
- M. Kac and J. Logan, *Fluctuations*, in: *Studies in Statistical Mechanics*, vol. VII, ed. by E. W. Montrol and J. L. Lebovitz (North-Holland, Amsterdam, 1979) \*\*.
- T. Hida, *Brownian Motion* (Springer, Berlin, 1980) \*\*\*.
- M. Kac, *Integration in Function Spaces and Some of Its Applications* (Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980) \*\*\*.
- Z. Schuss, *Theory and Applications of Stochastic Differential Equations* (Wiley, New York, 1980) \*\*\*.
- N. G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1981) \*\*.
- C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, 1983) \*\*.
- A. D. Ventsel, *Teoria dei Processi Stocastici* (Editori Riuniti, Roma, 1983)\*\*\*.

- E. S. Ventsel, *Teoria delle Probabilità* (Mir, Mosca, 1983) \*.
- K. Baclawski, M. Cesaroli e G. C. Rota, *Introduzione alla Probabilità* (Unione Matematica Italiana, Bologna, 1984) \*.
- R. Serra, M. Andretta, G. Zanarini e M. Compiani, *Introduzione alla Fisica dei Sistemi Complessi* (Clueb, Bologna, 1984) \*.
- B. V. Gnedenko, *Teoria della Probabilità* (Editori Riuniti, Roma, 1987) \*.
- R. Kubo, M. Toda and N. Hashitsume, *Statistical Physics II* (Springer, Berlin, 1987) \*\*.
- T. C. Gard, *Introduction to Stochastic Differential Equations* (Dekker, New York, 1988) \*\*.
- H. Risken, *The Fokker-Planck Equation* (Springer, Berlin, 1988) \*\*.
- N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes* (North-Holland, Amsterdam, 1989) \*\*\*.

#### 6.6 – Formulazione di Nelson della meccanica quantistica

- E. Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion* (Princeton University Press, Princeton, 1967) \*\*\*.
- G. C. Ghirardi, C. Omero, A. Rimini and T. Weber, *The Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics: A Critical Review*, *Rivista Nuovo Cimento* **1, 3** (1978) \*.
- F. Guerra, *Structural Aspects of Stochastic Mechanics and Stochastic Field Theory*, *Phys. Rep.* **77**, 263 (1981) \*.
- G. Jona-Lasinio, F. Martinelli and E. Scoppola, *The Semiclassical Limit of Quantum Mechanics: A Qualitative Theory via Stochastic Mechanics*, *Phys. Rep.* **77**, 313 (1981) \*\*.
- E. Nelson, *Quantum Fluctuations* (Princeton University Press, Princeton, 1985) \*\*\*.
- P. Ruggiero and M. Zannetti, *Stochastic Quantization at Finite Temperature*, *Rivista Nuovo Cimento* **8, 5** (1985) \*.
- K. Namsrai, *Nonlocal Quantum Field Theory and Stochastic Quantum Mechanics* (Reidel, Dordrecht, 1986) \*\*.
- Ph. Blanchard, Ph. Combe and W. Zeng, *Mathematical and Physical Aspects of Stochastic Mechanics* (Springer, Berlin, 1987) \*\*.

### Addendum

Dopo aver completato il presente Quaderno, siamo venuti a conoscenza delle seguenti pubblicazioni riguardanti l'integrale di Feynman.

W. Dittrich and M. Reuter, *Classical and Quantum Dynamics* (Springer, Berlin, 1992) \*\*.

H. M. Fried, *Functional Methods and Models in Quantum Field Theory*, (MIT Press, Cambridge, 1972) \*\*\*.

H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics Statistics and Polymer Physics* (World Scientific, Singapore, 1990) \*\*.

F. Langouche, D. Rockaerts and E. Tirapegui, *Functional Integration and Semiclassical Expansions* (Reidel, Dordrecht, 1982) \*\*.

V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective excitations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1987) \*\*.

J. Rzewuski, *Field Theory* (Ilfie Books, London, 1969), 2 vols \*\*.