

## XII. PROCESSI D'URTO

Una delle procedure più utili per ottenere informazioni sulla dinamica di un sistema fisico è quella di sollecitarlo con una sonda esterna, ad esempio un fascio di particelle (o onde) che incidono sul bersaglio costituito dal sistema in esame. La rivelazione delle particelle (o onde), diffuse nelle diverse direzioni dopo aver interagito con il sistema allo studio, ne definisce la risposta. Nel capitolo precedente si è già affrontato questo problema nel caso particolare dell'interazione radiazione–materia, dove la radiazione poteva essere trattata in modo semiclassico. Ma in generale anche la descrizione del proiettile deve essere quantistica: questa è un'esigenza che deve essere soddisfatta proprio da quelle particelle che denunciano un aspetto ondulatorio, come gli elettroni e le altre particelle del mondo atomico e subatomico.

La descrizione dell'interazione tra proiettile e bersaglio deve dunque ricorrere all'equazione di Schrödinger e deve essere in grado di riprodurre l'urto elastico, per il quale la distribuzione angolare delle particelle diffuse fornisce in prima approssimazione una mappa del potenziale di interazione tra proiettile e bersaglio. Ma l'urto può essere anche anelastico e provocare reazioni che portano a uno stato finale con dei prodotti diversi dal proiettile e dal bersaglio. Il formalismo sviluppato in questo capitolo è adatto, in linea di principio, per studiare tutte queste possibilità e riprodurre la situazione sperimentale raffigurata in fig. 1.1.

Dopo la definizione delle quantità necessarie per un confronto con l'esperienza, la teoria si sviluppa principalmente nel caso dell'urto elastico, esaminando metodi di approssimazione utili. Incidentalmente, fu proprio l'applicazione dell'equazione di Schrödinger al caso di un processo d'urto che permise a Max Born <sup>1</sup> di intuire la corretta interpretazione della funzione d'onda in termini di ampiezza di probabilità e di stabilire anche uno dei criteri più efficaci per un'utile approssimazione nel risolvere il problema d'urto.

---

<sup>1</sup> Cfr. n. 18 p. 109.

L'approfondimento di aspetti più formali della teoria porta a stabilire una connessione tra gli stati imperturbati del proiettile e del bersaglio non interagenti e quelli che li descrivono in interazione. Questa connessione permette di definire la matrice di scattering <sup>2</sup>, o matrice  $S$ , che contiene in generale l'informazione fisica sul processo e che consente di estendere la trattazione al caso più generale.

### XII.1. Sezione d'urto

Lo sperimentatore, che utilizza il dispositivo raffigurato in fig. 1.1 per lo studio di un certo processo  $\alpha$ , con le sue misure accede alle seguenti quantità:

- $m(\alpha)$  = numero totale di eventi  $\alpha$ , registrati attraverso il conteggio del rivelatore, tarato in modo da selezionare solo le particelle in arrivo che hanno partecipato al processo  $\alpha$ ,
- $N$  = numero delle particelle incidenti, misurato in pratica dal catturatore di fascio posto alle spalle del bersaglio,
- $n$  = numero di centri diffusori del bersaglio per unità di superficie offerta all'arrivo del fascio incidente.

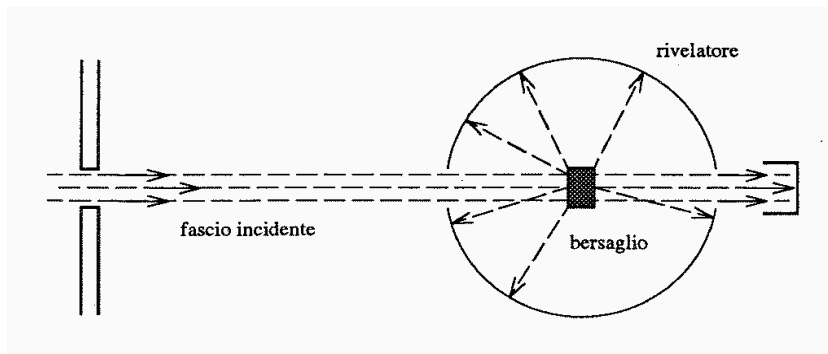


Fig. 1.1. Schema della disposizione sperimentale per la diffusione di particelle.

Con questi ingredienti, lo sperimentatore può costruire il rapporto

$$\sigma(\alpha) = \frac{m(\alpha)}{N n}, \quad (1.1)$$

che, tenendo conto delle definizioni e riferendo numeratore e denominatore della (1.1) all'unità di tempo e al singolo centro diffusore, può essere così interpretato:

$$\sigma(\alpha) = \frac{\text{numero totale di eventi } \alpha \text{ per unità di tempo e per centro diffusore}}{\text{numero di particelle incidenti per unità di tempo e per unità di superficie}}. \quad (1.2)$$

<sup>2</sup> È ormai entrato nell'uso corrente il nome di gergo *scattering* per indicare il processo d'urto; letteralmente *scattering* significa *diffusione*.

*Sezione d'urto*

La (1.2) ha le dimensioni di una superficie: la superficie, di area  $\sigma(\alpha)$ , rappresenta la sezione offerta dal bersaglio al fascio incidente responsabile dei processi di tipo  $\alpha$ . Perciò  $\sigma(\alpha)$  viene detta *sezione d'urto totale* per l'evento  $\alpha$  e usualmente viene misurata in sottomultipli di barn:  $1\text{ barn} = 10^{-28}\text{m}^2$ .

Qualora la disposizione sperimentale del rivelatore, invece di abbracciare l'intero angolo solido di  $4\pi$ , sia sensibile solo a una porzione  $d\Omega$ , si può definire la *sezione d'urto differenziale*:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\text{numero di eventi per unità di angolo solido}}{N n} \\ &= \frac{\text{numero di eventi per unità di tempo e per centro diffusore nell'unità di angolo solido}}{\text{numero di particelle incidenti per unità di tempo e per unità di superficie}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

La sezione d'urto differenziale è legata dunque alla distribuzione angolare dei prodotti di reazione e dà in generale un'informazione più dettagliata della sezione d'urto totale. Naturalmente si ha

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}. \quad (1.4)$$

La definizione (1.2) e la seconda riga della (1.3) indicano che il dato sperimentale, ottenuto a partire dalle molte particelle del fascio e del bersaglio, può essere ricondotto alla singola interazione elementare tra una particella del fascio e una particella del bersaglio che agisce da centro diffusore per il processo. Nel sistema di riferimento del laboratorio si ha la situazione della fig. 1.2.

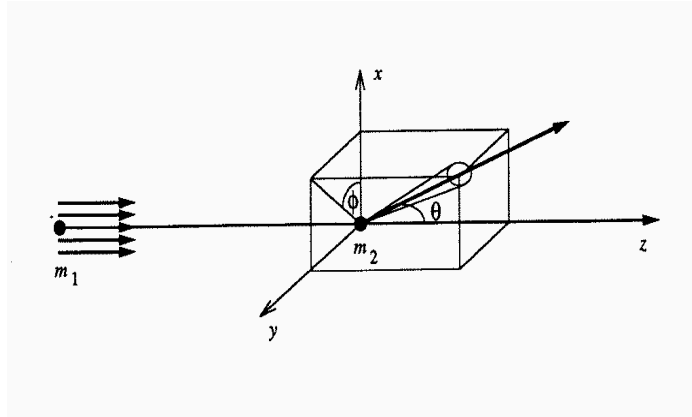


Fig. 1.2. La diffusione di particelle nel sistema del laboratorio.

Un processo d'urto può essere allora descritto in termini quantistici invocando la hamiltoniana  $H'$  associata alle due particelle di massa  $m_1$  e  $m_2$ , interagenti con un potenziale  $V(\mathbf{r})$ , dove  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  è il vettore posizione della particella 1 relativamente alla particella 2:

$$H' = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

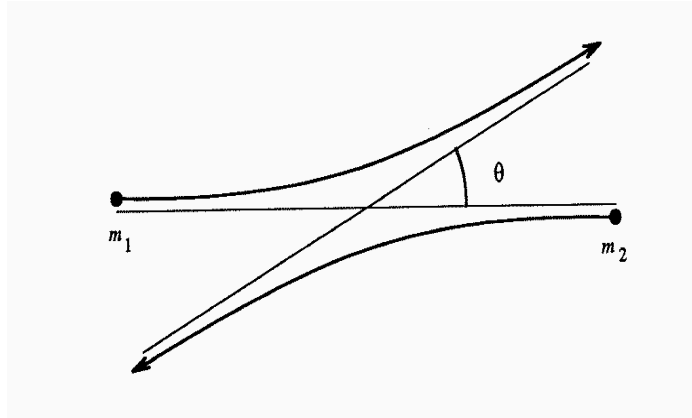


Fig. 1.3. L'urto di due particelle nel sistema del loro centro di massa.

Nel sistema del laboratorio, il problema agli autovalori per la hamiltoniana (1.5) è un problema a due corpi che, come si è fatto nel paragrafo X.1, viene semplificato passando al sistema di riferimento del centro di massa (fig. 1.3). In tal modo la hamiltoniana (1.5) può risciversi come somma di un termine che descrive il moto libero del centro di massa e di un termine che descrive il moto di una particella di massa ridotta  $m$ ,

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad (1.6)$$

in presenza del potenziale  $V(\mathbf{r})$ :

$$H' = H_{cm} + H, \quad (1.7)$$

$$H_{cm} = \frac{P^2}{2(m_1 + m_2)}, \quad (1.8)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}). \quad (1.9)$$

L'informazione fisica sulla dinamica del sistema proiettile-bersaglio è contenuta nella hamiltoniana  $H$  del moto relativo e il problema a due corpi si spezza, come nel caso classico, nel moto libero del centro di massa (che d'ora innanzi sarà ignorato) e nel problema di una sola particella (di massa ridotta  $m$ ). A seconda della forma del potenziale  $V(\mathbf{r})$ , l'equazione agli autovalori per la hamiltoniana (1.9) può ammettere anche soluzioni a energia negativa corrispondenti a stati legati che si stabiliscono tra

proiettile e bersaglio. Però in generale tale equazione ha sempre soluzioni a energia positiva ( $\notin \mathcal{L}^2$ ) che descrivono stati non legati appartenenti allo spettro continuo di  $H$ .

Si escluderà nel seguito il caso di un potenziale a lungo raggio d'azione quale il potenziale coulombiano, per il quale peraltro è possibile trovare la soluzione esatta del problema agli autovalori a energie positive in termini di serie ipergeometrica confluyente, come s'è visto per l'atomo di idrogeno (paragrafo V.8). Pertanto nella (1.9) verrà adottata l'ipotesi

$$rV(\mathbf{r}) \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow \infty, \quad (1.10)$$

corrispondente al fatto che l'interazione tra proiettile e bersaglio è confinata ad una regione dello spazio in prossimità del bersaglio stesso, così che le particelle emergenti dopo l'urto, contate dal rivelatore, vi arrivino praticamente con moto libero.

*Esercizio 1.1*

Verificare la bontà dell'ipotesi (1.10) nel caso dell'urto nucleone–nucleone (cfr. eq. (X.9.12)).

Limitando la trattazione per il momento al caso dell'*urto elastico*, nella ricerca delle soluzioni dell'equazione agli autovalori per la (1.9), che nello spazio delle posizioni è un'equazione differenziale, occorre fissare le condizioni al contorno. È opportuno imporre che la soluzione a energia positiva si comporti a grandi distanze  $r$  nel modo seguente<sup>3</sup>:

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (1.11)$$

La (1.11) riflette la situazione sperimentale di un fascio di particelle incidenti (descritte da un'onda piana  $e^{ikz}$  che si propaga lungo l'asse  $z$ ) e di particelle diffuse dopo l'urto in tutte le direzioni (descritte da un'onda sferica  $e^{ikr}/r$ , modulata da un coefficiente angolare  $f(\theta, \phi)$ ). Ciò si può verificare calcolando la densità di corrente (III.3.25),

$$\mathbf{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*), \quad (1.12)$$

associata a ciascuno dei due termini in (1.11) e ricordando l'interpretazione data ad essa nel paragrafo IV.2 in connessione con lo spettro continuo (cfr. eq. (IV.2.87)). Allora  $e^{ikz}$  corrisponde a un flusso  $v = \hbar k/m$  di particelle che si muovono nella direzione positiva dell'asse  $z$  con velocità costante  $v$ <sup>4</sup>. Il flusso associato al secondo

<sup>3</sup> Questo comportamento asintotico della funzione d'onda per i processi d'urto è stato proposto da M. Born nei lavori citati alla n. 18 p. 109.

<sup>4</sup> Se nella (1.11) si fosse normalizzata la funzione in accordo con le prescrizioni del paragrafo IV.2, l'onda piana incidente  $(2\pi)^{-3/2}e^{ikz}$  corrisponderebbe a un flusso di  $(2\pi)^{-3}v$  particelle. La normalizzazione

termine della (1.11) e relativo a un angolo solido  $d\Omega$  attorno alla direzione  $(\theta, \phi)$  prescelta, è ottenibile dalla densità di corrente,

$$j = -\frac{i\hbar}{2m} \left\{ f^*(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{d}{dr} \left[ f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right] - f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{d}{dr} \left[ f^*(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \right] \right\}$$

$$= \frac{\hbar k}{m} \frac{1}{r^2} |f(\theta, \phi)|^2,$$

cioè

$$j = v \frac{1}{r^2} |f(\theta, \phi)|^2. \quad (1.13)$$

Il flusso che attraversa la superficie  $r^2 d\Omega$  è pertanto

$$j r^2 d\Omega = v |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega \quad (1.14)$$

e rappresenta il numero di particelle che attraversano tale superficie nell'unità di tempo. Dividendo dunque la (1.14) per il flusso  $v$  di particelle incidenti, si recupera esattamente la definizione (1.3) di sezione d'urto differenziale secondo lo sperimentatore. Pertanto è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2. \quad (1.15)$$

La (1.15) fornisce il legame fondamentale tra la misura sperimentale e la descrizione del processo d'urto nella teoria quantistica non relativistica basata sull'equazione di Schrödinger. L'ingrediente fondamentale della teoria è costituito dunque dalla quantità  $f(\theta, \phi)$ , che viene detta *ampiezza di diffusione*<sup>5</sup>. Trovate le soluzioni dell'equazione agli autovalori per la hamiltoniana del problema d'urto (a energie positive), soluzioni che devono comportarsi asintoticamente come la (1.11), il modulo quadrato dell'ampiezza di diffusione  $f(\theta, \phi)$  produce immediatamente la sezione d'urto differenziale. Naturalmente la sezione d'urto totale si ottiene poi per integrazione sull'angolo solido, come nella (1.4).

#### Esempio 1.1

Nella derivazione della (1.15) si sono considerati separatamente il flusso incidente e quello diffuso relativi a una funzione d'onda con il comportamento asintotico (1.11). Il procedimento è legittimo per angoli  $\theta \neq 0$ , per i quali può essere a priori evidente che a grandi distanze dal centro diffusore non ci siano contributi apprezzabili d'interferenza tra l'onda incidente lungo la direzione  $z$  e l'onda diffusa a un angolo  $\theta \neq 0$ . Può restare il dubbio che l'interferenza sia efficace ad angoli  $\theta$  molto piccoli. Il dubbio può essere qui risolto, calcolando esplicitamente tutte le componenti della densità di corrente (1.12) per l'intera  $\Psi(\mathbf{r})$  che compare nella (1.11) e dimostrando che tale interferenza è trascurabile<sup>6</sup>.

globale della (1.11) è però inessenziale nel calcolo della sezione d'urto, che è un rapporto tra flusso diffuso e flusso incidente (cfr. la derivazione della successiva eq. (1.15)).

<sup>5</sup> Nel gergo corrente l'ampiezza di diffusione viene spesso indicata come *ampiezza di scattering*.

<sup>6</sup> Siegfried Flügge: *Practical Quantum Mechanics*, Springer, Berlino, 1971, vol. 1, p. 208.

Sezione d'urto

Utilizzando coordinate polari, il gradiente ha componenti (Esercizio III.7.1):

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \nabla_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \nabla_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (1.16)$$

Corrispondentemente, le componenti della densità di corrente sono:

$$j_r = \frac{\hbar k}{m} \left( \cos \theta + \frac{|f|^2}{r^2} \right) + \frac{\hbar}{2m} \left\{ f [kr(1 + \cos \theta) + i] \frac{e^{ik(r-z)}}{r^2} + f^* [kr(1 + \cos \theta) - i] \frac{e^{-ik(r-z)}}{r^2} \right\}, \quad (1.17)$$

$$j_\theta = -\frac{\hbar k}{m} \sin \theta - \frac{i \hbar}{2m} \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} - ikr f \sin \theta \right) \frac{e^{ik(r-z)}}{r^2} - \left( \frac{\partial f^*}{\partial \theta} + ikr f^* \sin \theta \right) \frac{e^{-ik(r-z)}}{r^2} \right\} - \frac{i \hbar}{2m} \frac{1}{r^3} \left( \frac{\partial f}{\partial \theta} f^* - f \frac{\partial f^*}{\partial \theta} \right), \quad (1.18)$$

$$j_\phi = -\frac{i \hbar}{2m} \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} e^{ik(r-z)} - \frac{\partial f^*}{\partial \phi} e^{-ik(r-z)} \right) - \frac{i \hbar}{2m} \frac{1}{r^3 \sin \theta} \left( \frac{\partial f}{\partial \phi} f^* - f \frac{\partial f^*}{\partial \phi} \right). \quad (1.19)$$

Nella (1.19) è  $\theta \neq 0$ , altrimenti per  $\theta = 0$  risulta  $f$  indipendente da  $\phi$  e  $j_\phi = 0$ .

A grandi distanze,  $r \rightarrow \infty$ , i termini in  $r^{-3}$  presenti in  $j_\theta$  e  $j_\phi$  diventano trascurabili rispetto agli altri. Inoltre, per avere un'intensità finita del fascio di particelle rivelate in una certa direzione  $(\theta, \phi)$ , occorre disporre di un rivelatore che necessariamente sottende un angolo solido  $\delta\Omega$  finito, per quanto piccolo possa essere. Ciò comporta un'integrazione della densità di corrente sull'angolo solido di accettazione del rivelatore. Allora tutti i termini che contengono i fattori oscillanti  $\exp[\pm ik(r-z)] = \exp[\pm ikr(1 - \cos \theta)]$  si integrano a zero per  $r \rightarrow \infty$ . Le (1.17) – (1.19) perciò si riducono alla forma

$$\begin{cases} j_r = \frac{\hbar k}{m} \left( \cos \theta + \frac{|f|^2}{r^2} \right), \\ j_\theta = -\frac{\hbar k}{m} \sin \theta, \\ j_\phi = 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

in cui non c'è più traccia dei termini di interferenza tra onda incidente e onda diffusa. Il contributo dell'onda diffusa in  $j_r$  coincide con la (1.13). Gli altri contributi in  $j_r$  e in  $j_\theta$  sono le componenti  $r$  e  $\theta$  della corrente associata all'onda piana incidente.

In questo senso il procedimento per giungere alla definizione della sezione d'urto differenziale (1.15) è legittimo. Tuttavia va tenuto presente che il flusso di particelle

diffuse in tutte le direzioni dello spazio, diverse da quella in avanti lungo il fascio incidente, è accompagnato da una diminuzione di flusso in avanti. Questa è provocata dall'interferenza distruttiva, anche se piccola, tra le onde incidenti e le onde diffuse in avanti. È proprio grazie a questa interferenza che viene garantita la conservazione del flusso totale e la validità del teorema ottico (cfr. paragrafo XII.8).

### XII.2. Funzione di Green e ampiezza di diffusione

Il problema di base della teoria dell'urto è il calcolo dell'ampiezza di diffusione che interviene nella condizione asintotica (1.11). Non sempre tale problema è esattamente risolubile. Qui viene presentato un metodo generale di risoluzione dell'equazione agli autovalori che permette di inglobare automaticamente le condizioni al contorno desiderate.

Sia data la hamiltoniana

$$H = H_0 + V \quad (2.1)$$

e si supponga di conoscere le soluzioni per  $H_0$ ,

$$H_0|\Phi_n\rangle = E_n|\Phi_n\rangle, \quad (2.2)$$

dove  $n$  è un indice che caratterizza il complesso di numeri quantici necessari per distinguere le soluzioni, mentre  $E_n$  in generale appartiene allo spettro continuo di  $H_0$ . L'equazione agli autovalori per  $H$ ,

$$(E - H_0)|\Psi\rangle = V|\Psi\rangle, \quad (2.3)$$

nella rappresentazione delle posizioni è un'equazione differenziale che va corredata con la condizione al contorno (1.11). Per inglobare automaticamente tale condizione, è conveniente introdurre l'operatore

$$G_0 \equiv \frac{1}{E - H_0}, \quad (2.4)$$

tale che sia

$$G_0(E - H_0) = (E - H_0)G_0 = \mathbb{1}. \quad (2.5)$$

L'operatore  $G_0$ , impropriamente chiamato spesso *funzione di Green*<sup>7</sup>, è perfettamente definito dalla conoscenza delle sue autofunzioni e dei suoi autovalori. Le sue autofunzioni coincidono con quelle della (2.2). Infatti, si ha

---

<sup>7</sup>  $G_0$  è un *operatore* indicato dai matematici come *risolvente*, in quanto permette la risoluzione della (2.3) (cfr. le successive eq. (2.20) e (2.24)), ma viene spesso indicato (soprattutto dai fisici) con il nome improprio di *funzione di Green* associata alla (2.2). Spesso i fisici usano anche il nome di *propagatore*, perché permette di trovare la soluzione fondamentale dell'equazione di Schrödinger (cfr. paragrafo VII.2).



$$(E - H_0)|\Phi_n\rangle = (E - E_n)|\Phi_n\rangle,$$

da cui, moltiplicando ambo i membri per  $G_0$ , si ottiene

$$\begin{aligned} G_0(E - H_0)|\Phi_n\rangle &= |\Phi_n\rangle \\ &= (E - E_n)G_0|\Phi_n\rangle, \end{aligned}$$

cioè

$$G_0|\Phi_n\rangle = \frac{1}{E - E_n}|\Phi_n\rangle. \quad (2.6)$$

Viceversa si può mostrare in modo analogo che le autofunzioni di  $G_0$  sono autofunzioni anche di  $H_0$ .

Dunque l'operatore  $G_0$  ha la seguente risoluzione spettrale:

$$G_0 = \sum_n |\Phi_n\rangle \frac{1}{E - E_n} \langle \Phi_n|. \quad (2.7)$$

L'operatore  $G_0$  dipende dal parametro  $E$ , che però non può essere assegnato ad arbitrio. Infatti, quando nella (2.6) o nella (2.7) si verifica che è  $E = E_n$ , si presenta un polo e la definizione dell'operatore  $G_0$  perde di significato, a meno di assegnare qualche criterio per aggirare la singolarità.

#### Esempio 2.1

In questo esempio viene costruita la funzione di Green per la particella libera. Sia dunque data la hamiltoniana della particella libera,

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.8)$$

di cui sono noti autostati  $|\mathbf{k}\rangle$  e autovalori

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (2.9)$$

Nella rappresentazione delle posizioni gli autostati sono onde piane,

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.10)$$

e la funzione di Green è definita mediante la matrice che rappresenta l'operatore (2.4):

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - H_0} | \mathbf{r}' \rangle. \quad (2.11)$$

La matrice non diagonale  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  indica che  $G_0$  nella rappresentazione delle posizioni è in generale non locale, in quanto dipende da  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  simultaneamente. La (2.11) può risciversi

$$\begin{aligned}
 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \frac{1}{E - H_0} | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r}' \rangle \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \langle \mathbf{k} | \frac{1}{E - H_0} | \mathbf{k}' \rangle e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \frac{1}{E - E_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),
 \end{aligned}$$

da cui si ottiene la risoluzione spettrale per  $G_0$ :

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{E - E_{\mathbf{k}}}. \quad (2.12)$$

Si verifica subito che  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  soddisfa all'equazione

$$\begin{aligned}
 (E - H_0)G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\
 &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

che corrisponde alla (2.5) riscritta nello spazio delle posizioni, analogamente alla (2.12) che trascrive la (2.7) nella rappresentazione delle posizioni (cfr. anche Esercizio VII.2.5).

Nella (2.12) l'integrazione su  $k = |\mathbf{k}|$  non è immediatamente possibile per la presenza di poli nell'integrando. Infatti, tenendo presente che anche  $E$  ha la stessa forma (2.9) di  $E_{\mathbf{k}}$  e chiamando  $k'$  la variabile di integrazione, la (2.12) diventa

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2m}{\hbar^2} \int d\mathbf{k}' \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2 - k'^2}, \quad (2.14)$$

che presenta appunto zeri del denominatore in corrispondenza di  $k' = \pm k$ .

Si possono evitare le divergenze nell'integrazione (2.14) adottando per esempio la seguente prescrizione:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2m}{\hbar^2} \int d\mathbf{k}' \frac{e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{k^2 - k'^2 + i\epsilon}, \quad (2.15)$$

dove  $\epsilon$  è una quantità positiva da far tendere a zero dopo avere eseguito l'integrazione. Il suo effetto è quello di spostare le singolarità dell'integrando nel piano complesso di  $k'$  fuori dall'asse reale:

$$k' = \pm \sqrt{k^2 + i\epsilon} \simeq \pm \left( k + \frac{i\epsilon}{2k} + O(\epsilon^2) \right), \quad (2.16)$$

con  $k > 0$ . In tal modo l'integrale (2.15) è regolare e può essere eseguito. Integrando dapprima sugli angoli polari di  $k'$  si ottiene

$$\begin{aligned}
 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2m}{\hbar^2} 2\pi \int_0^\infty dk' k'^2 \frac{1}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} \frac{e^{ik'|r-r'|} - e^{-ik'|r-r'|}}{ik'|r-r'|} \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{2\pi}{i|r-r'|} \int_0^\infty dk' \frac{k'}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} \left( e^{ik'|r-r'|} - e^{-ik'|r-r'|} \right) \quad (2.17) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{2\pi}{i|r-r'|} \int_{-\infty}^\infty dk' k' \frac{e^{ik'|r-r'|}}{k^2 - k'^2 + i\epsilon}.
 \end{aligned}$$

Grazie alla (2.16) l'integrale su  $k'$  si può ora eseguire nel piano complesso di  $k' = k_1 + ik_2$ ,  $k_2 > 0$ . Aggiungendo all'integrale sull'asse reale di  $k'$  l'integrale lungo una semicirconfenza di raggio infinito nel semipiano  $k_2 > 0$ , nulla cambia in quanto il fattore

$$e^{ik'|r-r'|} = e^{ik_1|r-r'| - k_2|r-r'|}$$

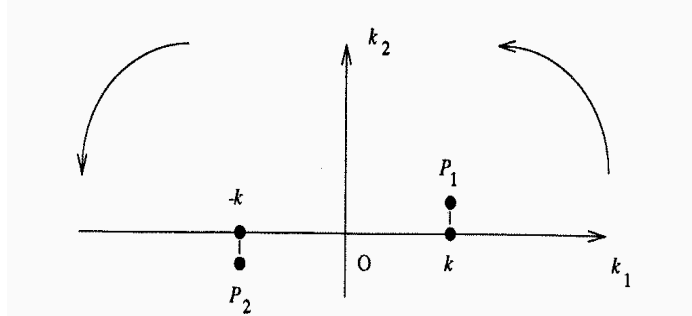


Fig. 2.1. Il piano complesso di  $k'$  e le singolarità della funzione di Green.

smorza a zero il contributo lungo la semicirconfenza di centro  $O$  e raggio  $k_2 \rightarrow +\infty$  (fig. 2.1). Si può così valutare l'integrale nella (2.17) utilizzando il teorema di Cauchy applicato al residuo del polo  $P_1$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^\infty dk' k' \frac{e^{ik'|r-r'|}}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} &= \oint dk' k' \frac{e^{ik'|r-r'|}}{k^2 - k'^2 + i\epsilon} \\
 &= 2\pi i \frac{e^{i\sqrt{k^2+i\epsilon}|r-r'|}}{-2\sqrt{k^2+i\epsilon}} \sqrt{k^2+i\epsilon} \\
 &= -\pi i e^{i\sqrt{k^2+i\epsilon}|r-r'|}.
 \end{aligned}$$

Pertanto la (2.17) diventa

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2m}{\hbar^2} \frac{2\pi}{i|r-r'|} (-\pi i) e^{i\sqrt{k^2+i\epsilon}|r-r'|},$$

cioè

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.18)$$

Il risultato (2.18) semplifica la struttura non locale della funzione di Green, che appare funzione di  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  solamente, e non di  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . Di conseguenza  $G_0$  è invariante per traslazione del sistema di riferimento, in accordo col fatto che si sta descrivendo una particella libera. Inoltre,  $G_0$  risulta anche invariante per rotazioni.

Se si fosse adottata la prescrizione (2.15) con  $\epsilon < 0$ , all'integrale (2.17) avrebbe contribuito il polo  $P_2$  con il risultato seguente:

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.19)$$

La soluzione generale della (2.3) può scriversi come somma di due contributi. Uno è dato da un integrale particolare dell'equazione differenziale completa (2.3) che può porsi nella forma

$$\frac{1}{E - H_0} V |\Psi\rangle = G_0 V |\Psi\rangle;$$

l'altro contributo proviene dalla soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea corrispondente, cioè della (2.2), che si può indicare con  $|\Phi\rangle$ . Pertanto la (2.3) ha come soluzione generale

$$|\Psi\rangle = |\Phi\rangle + G_0 V |\Psi\rangle. \quad (2.20)$$

La (2.20) è solo una soluzione formale per la  $|\Psi\rangle$ . Tradotta nella rappresentazione delle posizioni, la (2.20) è piuttosto la trasformazione in equazione integrale dell'equazione differenziale corrispondente alla (2.3). Si riscriva infatti la (2.20) nella rappresentazione delle posizioni,

$$\langle \mathbf{r} | \Psi \rangle = \langle \mathbf{r} | \Phi \rangle + \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - H_0} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r}'' \rangle \langle \mathbf{r}'' | \Psi \rangle, \quad (2.21)$$

e si tenga presente che il potenziale  $V$  è in genere locale, cioè

$$\langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{r}'' \rangle = V(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''). \quad (2.22)$$

Allora, posti

$$\langle \mathbf{r} | \Psi \rangle \equiv \Psi(\mathbf{r}), \quad \langle \mathbf{r} | \Phi \rangle \equiv \Phi(\mathbf{r}), \quad (2.23)$$

la (2.21) diventa

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}'). \quad (2.24)$$

Simultaneamente però, nello scrivere la (2.20) (o la (2.24)), la necessità di definire il modo di aggirare le eventuali singolarità della funzione di Green permette di tenere conto delle condizioni al contorno. Ciò si può verificare nel prossimo Esempio, fruendo dei risultati ottenuti nell'Esempio 2.1.

*Esempio 2.2*

La prescrizione (2.15) per  $G_0$  ha prodotto il risultato (2.18). Facendo tendere  $r \rightarrow \infty$  si ha

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= (r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2)^{1/2} \\ &= r \left( 1 - \frac{2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2} \right)^{1/2} \\ &= r \left[ 1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + O\left(\frac{r'^2}{r^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Siccome il potenziale  $V(\mathbf{r})$  ha raggio d'azione limitato, nell'integrale su  $\mathbf{r}'$  nella (2.24) si possono trascurare i contributi  $O(r'^2/r^2)$ . Pertanto

$$\Psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{r}) - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{-ik_r \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}'), \quad (2.25)$$

dove si è posto

$$\mathbf{k}_r = k \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (2.26)$$

La (2.25), con la scelta

$$\Phi(\mathbf{r}) = e^{ikz}, \quad (2.27)$$

ha proprio la struttura (1.11) corrispondente alle condizioni al contorno desiderate nel problema d'urto, cioè di onda piana incidente (2.27) più un'onda sferica uscente,  $e^{ikr}/r$ , modulata con il fattore angolare,

$$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d\mathbf{r}' e^{-ik_r \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi(\mathbf{r}'), \quad (2.28)$$

che rappresenta l'ampiezza di diffusione.

La (2.18) corrisponde a imporre alla soluzione particolare (2.3) la condizione al contorno di onda sferica uscente. Se si fosse scelto  $\epsilon < 0$  nella prescrizione (2.15) con il conseguente risultato (2.19), nella (2.25) sarebbe comparsa invece un'onda entrante, che pure è una soluzione accettabile matematicamente, ma corrispondente a condizioni al contorno qui non interessanti.

La (2.28) risolve formalmente il problema dell'urto elastico permettendo il calcolo della sezione d'urto. Resta aperto il problema di ottenere la  $\Psi(\mathbf{r})$  per tutti gli  $\mathbf{r}$ , una volta noto  $V(\mathbf{r})$ . Comunque la struttura dell'ampiezza di diffusione (2.28) è, a parte fattori numerici, quella di un *elemento di matrice* del potenziale di interazione

tra proiettile e bersaglio. Tale elemento di matrice è calcolato tra il ket  $|\Psi\rangle$  che descrive lo stato diffuso  $\Psi(\mathbf{r})$  con comportamento asintotico (1.11) e il bra  $\langle\Phi_{k_r}|$  relativo allo stato libero  $e^{ik_r \cdot \mathbf{r}}$ :

$$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \langle\Phi_{k_r}|V|\Psi\rangle. \quad (2.29)$$

La forma dell'ampiezza di diffusione qui ottenuta nel caso dell'urto elastico è più generale e facilmente estendibile anche al caso di processi anelastici (v. oltre al paragrafo XII.14.).

### XII.3. Equazione di Lippmann-Schwinger

Il metodo basato sulla funzione di Green esposto al paragrafo precedente permette di ottenere formalmente le soluzioni dell'equazione agli autovalori (2.3) nella forma (2.20). D'altra parte nella definizione della funzione di Green un ruolo essenziale rivestono le condizioni al contorno con cui si vuole risolvere la (2.3). Da un punto di vista matematico, sono ugualmente accettabili condizioni al contorno di onda sferica uscente oppure entrante: l'unica differenza formale sta nel modo con cui si spostano le singolarità nel piano complesso di  $E$  nel definire la (2.7). A seconda di quale condizione si sceglie, l'insieme degli autostati di  $H$  appartenenti alla porzione continua del suo spettro è costituito da stati di tipo

$$|\Psi_a^{(\pm)}\rangle = |\Phi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\epsilon} V |\Psi_a^{(\pm)}\rangle. \quad (3.1)$$

Le opportune condizioni al contorno di onda sferica uscente (+) o entrante (-) sono automaticamente garantite dal segno di  $\epsilon$ , come si può verificare riscrivendo la (3.1) nella rappresentazione delle posizioni e tenendo presente le considerazioni fatte nell'Esempio 2.1.

È da rilevare che la struttura della (3.1) è la stessa di quella prevista dallo sviluppo perturbativo di Brillouin-Wigner, eq. (VIII.5.8), di cui la (3.1) costituisce l'estensione alla parte continua dello spettro di  $H$ .

La (3.1) viene indicata come *equazione di Lippmann-Schwinger*<sup>8</sup>. Essa può essere trasformata in una forma equivalente, ricorrendo alla seguente identità operatoriale:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B} (B - A) \frac{1}{A}. \quad (3.2)$$

Ponendo

---

<sup>8</sup> B. Lippmann e J.S. Schwinger: *Variational Principles for Scattering Processes. I.* [Principi variazionali per i processi d'urto. I.], Physical Review **79** (1950) 469-480.

*Approssimazione di Born*

$$A = E - H_0 \pm i\epsilon, \quad B = E - H \pm i\epsilon, \quad (3.3)$$

dalla (3.2) segue

$$\frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} = \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} + \frac{1}{E - H \pm i\epsilon} (-V) \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}. \quad (3.4)$$

Inoltre, per la (3.1), è

$$\frac{1}{E_a - H \pm i\epsilon} V \frac{1}{E_a - H_0 \pm i\epsilon} V |\Psi_a^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{E_a - H \pm i\epsilon} V \left[ |\Psi_a^{(\pm)}\rangle - |\Phi_a\rangle \right]. \quad (3.5)$$

Applicando allora la (3.4) allo stato  $V|\Psi_a^{(\pm)}\rangle$  e tenendo presente la (3.5), si ha

$$\frac{1}{E_a - H_0 \pm i\epsilon} V |\Psi_a^{(\pm)}\rangle = \frac{1}{E_a - H \pm i\epsilon} V |\Phi_a\rangle, \quad (3.6)$$

che permette di riscrivere la (3.1) nella forma esplicita

$$|\Psi_a^{(\pm)}\rangle = |\Phi_a\rangle + \frac{1}{E_a - H \pm i\epsilon} V |\Phi_a\rangle. \quad (3.7)$$

La (3.7) fornisce le soluzioni del problema d'urto partendo dalla situazione imperturbata e facendo intervenire la funzione di Green

$$G = \frac{1}{E - H}, \quad (3.8)$$

relativa alla hamiltoniana completa  $H$ , anziché la funzione di Green  $G_0$  che compare nell'equazione implicita (3.1). Naturalmente la (3.7) equivale alla (3.1) e le difficoltà di risoluzione del problema restano inalterate. Tuttavia l'equazione di Lippmann-Schwinger (3.1) nella forma (3.7) può essere utile in applicazioni e, comunque, tutte le volte che sia possibile costruire esplicitamente  $G$ .

*XII.4. Approssimazione di Born*

Gli ingredienti fondamentali nel calcolo dell'ampiezza di diffusione (2.28) o (2.29) sono tre: l'onda incidente, in generale un'onda piana; il potenziale di interazione tra proiettile e bersaglio, che non sempre è noto; la funzione  $\Psi$  che risolve il problema agli autovalori per la hamiltoniana completa (2.1) e che interviene nel calcolo dell'ampiezza di diffusione con tutti i suoi valori al variare della posizione relativa proiettile-bersaglio. La determinazione della funzione  $\Psi$  è dunque l'aspetto più difficile e allo stesso tempo cruciale. D'altra parte l'ipotesi di un potenziale a

corto raggio d'azione semplifica il calcolo dell'integrale (2.28) in quanto esalta, della funzione  $\Psi$ , la parte a corte distanze dall'origine del potenziale. Il fatto poi che l'ampiezza di diffusione dipenda dalla funzione  $\Psi$  solo attraverso un'integrazione suggerisce l'idea che anche una funzione approssimata possa fornire un accettabile valore dell'integrale.

In realtà si può tentare la valutazione della (2.28) o della (2.29) con un procedimento di tipo iterativo, simile a quello adottato al paragrafo XI.3 nella risoluzione del problema delle perturbazioni dipendenti dal tempo, partendo da una funzione approssimata da un'onda piana:

$$\Psi(\mathbf{r}) \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (4.1)$$

Ciò equivale ad assumere che l'azione del potenziale  $V(\mathbf{r})$  è in prima approssimazione piccola, tale da rendere trascurabile la distorsione provocata sull'onda piana incidente. La misura di quanto piccola debba essere questa azione si ottiene confrontando la norma del contributo di diffusione nella (2.24) con la norma di  $\Phi(\mathbf{r})$ , che per l'onda piana è uguale a uno. Inserendo la (2.18) e la (4.1) nella (2.24), si deve dunque avere

$$\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \left| \int d\mathbf{r}' \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \right| \ll 1. \quad (4.2)$$

Allora, se si può accettare la condizione (4.1), l'ampiezza di diffusione (2.28) viene scritta nell'*approssimazione di Born*<sup>9</sup>

$$f_B(\theta, \phi) = -\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}), \quad (4.3)$$

dove

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_r \quad (4.4)$$

rappresenta il *momento trasferito* dal proiettile al bersaglio. Nel caso dell'urto elastico qui considerato è

$$q^2 = 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (4.5)$$

La (4.3) mostra che nell'approssimazione di Born l'ampiezza di diffusione fornisce una mappa del potenziale attraverso la sua trasformata di Fourier: una conoscenza della distribuzione angolare per tutti i valori di  $\mathbf{q}$  permetterebbe l'inversione di Fourier e quindi la determinazione di  $V(\mathbf{r})$ .

Per precisare i limiti di validità dell'approssimazione di Born è utile ricordare che il potenziale  $V(\mathbf{r})$  è efficace entro un raggio  $r \lesssim d$ . Scegliendo  $\mathbf{r} = 0$ , si esalta

<sup>9</sup> Anche quella che viene oggi indicata come approssimazione di Born, fu da lui proposta nei lavori citati alla n. 18 p. 109.



*Approssimazione di Born*

il contributo di  $V(\mathbf{r})$  nell'integrale. Se  $kd \sim 1$ , gli esponenziali nella (4.2) variano lentamente nella regione in cui  $V(\mathbf{r})$  contribuisce all'integrale e possono essere ritenuti costanti nell'integrazione. Perciò la (4.2) diventa

$$\frac{2m}{4\pi\hbar^2} \left| \int d\mathbf{r}' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') e^{ik\cdot\mathbf{r}'} \right| \simeq \frac{2m}{\hbar^2} \left| \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{V(\mathbf{r}')}{r'} \right| \ll 1, \quad (4.6)$$

cioè

$$\frac{2m}{\hbar^2} d^2 \bar{V} \ll 1, \quad (4.7)$$

dove si è definita la quantità

$$\bar{V} \equiv \frac{1}{4\pi d^2} \left| \int d\mathbf{r} \frac{V(\mathbf{r})}{r} \right| \quad (4.8)$$

come una sorta di valor medio del potenziale nella sfera di raggio  $d$ . Alla luce del principio di indeterminazione la quantità

$$\frac{\hbar^2}{2md^2} \simeq E \quad (4.9)$$

rappresenta l'energia cinetica di una particella in una regione di dimensioni lineari  $d$  (cfr. Esempio IV.6.1). Perciò la (4.7) implica

$$E \gg \bar{V}, \quad (4.10)$$

cioè l'energia cinetica del proiettile relativamente al bersaglio deve essere grande rispetto all'interazione reciproca media. L'approssimazione di Born è dunque un'approssimazione di *alta energia*.

*Esercizio 4.1*

Definita la quantità  $\lambda = 1/k$ , che, a parte un fattore  $2\pi$ , rappresenta la lunghezza d'onda del proiettile nel suo moto rispetto al bersaglio, qual è l'ordine di grandezza di  $\lambda$  perché sia valida l'approssimazione di Born?

*Esercizio 4.2*

Stabilire i limiti di validità dell'approssimazione di Born per il potenziale a simmetria sferica

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq d, \\ 0, & r > d. \end{cases}$$

Comunque l'approssimazione di Born è applicabile in concreto con successo anche con vincoli meno restrittivi della (4.10). Infatti, come s'è detto, è un'approssimazione dello stesso tipo usato nella teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo al primo ordine. Anzi, la sezione d'urto differenziale in approssimazione di Born,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_B(\theta, \phi)|^2 = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \left| \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \right|^2, \quad (4.11)$$

è ottenibile utilizzando la regola d'oro. Si calcoli infatti la probabilità per unità di tempo al primo ordine per la transizione dallo stato  $|\mathbf{k}\rangle$ , corrispondente all'onda piana iniziale di vettore d'onda  $\mathbf{k}$ , allo stato  $|\mathbf{k}'\rangle$  di onda piana finale di vettore d'onda  $\mathbf{k}'$ , con  $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ :

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle|^2 d\rho. \quad (4.12)$$

Nella (4.12) tale probabilità di transizione è valutata per una densità degli stati finali  $d\rho$  riferita all'unità di volume e per impulsi finali  $\mathbf{k}'$  diretti nell'angolo solido  $d\Omega$ . Secondo la (XI.4.21), dopo aver eseguito l'integrazione sull'energia, risulta:

$$d\rho = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} mp d\Omega, \quad (4.13)$$

dove  $p = \hbar k$  ( $= \hbar k'$ ). Pertanto la sezione d'urto differenziale si ottiene riferendo la (4.12) all'angolo solido  $d\Omega$  e dividendo per il flusso di particelle incidenti,  $p/m = \hbar k/m$ :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{p/m} \frac{dw}{d\Omega} = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} |\langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle|^2. \quad (4.14)$$

Esplicitando l'elemento di matrice di  $V$  nella rappresentazione delle posizioni, l'espressione (4.14) è identica alla (4.11) <sup>10</sup>.

#### Esempio 4.1

Si consideri un potenziale a simmetria sferica:  $V(\mathbf{r}) \equiv V(r)$ . In tal caso è

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle &= \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V(r) \\ &= 4\pi \int_0^\infty dr r^2 V(r) \frac{\sin qr}{qr}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Si assuma inoltre la seguente espressione esplicita di  $V(r)$ :

$$V(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} e^{-r/r_0}, \quad (4.16)$$

<sup>10</sup> Coerentemente con l'ipotesi di flusso incidente pari a  $p/m$ , gli stati  $|\mathbf{k}\rangle$  nella (4.14) sono normalizzati in modo da corrispondere alle onde piane  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  nella rappresentazione delle posizioni.

*Approssimazione di Born*

che può rappresentare il potenziale coulombiano tra due particelle di carica  $Z_1e$ ,  $Z_2e$ , rispettivamente, con un'azione di smorzamento a distanze dell'ordine di  $r_0$ . Così il potenziale (4.16) soddisfa alla condizione di applicabilità (1.10) della presente teoria dei processi d'urto. Il *potenziale coulombiano schermato* (4.16) si riduce a quello ordinario nel limite  $r_0 \rightarrow \infty$ . A un potenziale con questo tipo di dipendenza da  $r$  si arriva nella teoria di Yukawa delle forze nucleari, secondo la quale l'interazione tra due nucleoni avviene con lo scambio di un mesone. In tale teoria,  $r_0 = \hbar/mc$ , dove  $m$  è la massa del pione scambiato. Il raggio d'azione del potenziale è dunque tanto più piccolo, quanto maggiore è la massa del bosone scambiato: per un pione carico, la cui massa è  $mc^2 = 139.57$  MeV, risulta  $r_0 \simeq 1.5 \times 10^{-15}$  m = 1.5 fm, mentre per i bosoni  $W$  e  $Z^0$  si ha rispettivamente  $mc^2 \simeq 80$  GeV e  $mc^2 \simeq 91$  GeV, cui corrisponde  $r_0 \simeq 2 \times 10^{-3}$  fm.

Allora col potenziale (4.16) la (4.15) diventa

$$\int dr e^{iq \cdot r} V(\mathbf{r}) = \frac{4\pi Z_1 Z_2 e^2}{q^2 + r_0^{-2}} \xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} \frac{4\pi Z_1 Z_2 e^2}{q^2}. \quad (4.17)$$

Il risultato (4.17) può essere considerato la trasformata di Fourier del potenziale coulombiano, che per via normale non è possibile ricavare a causa della sua divergenza in  $r = 0$ <sup>11</sup>. Adottando l'espressione (4.17) nel calcolo della sezione d'urto differenziale, si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{m Z_1 Z_2 e^2}{2 \hbar^2 k^2 \sin^2 \theta / 2} \right]^2, \quad (4.18)$$

Questo risultato è noto come *formula di Rutherford*, in quanto già ottenuto in una trattazione classica da Rutherford nell'interpretare i risultati della diffusione di particelle  $\alpha$ <sup>12</sup>. È da rilevare che l'approssimazione di Born fornisce in questo caso un risultato esatto. La (4.18) è fortemente piccata in avanti ( $\theta = 0$ ), ma possiede valori non trascurabili anche a grandi angoli ( $\theta \gtrsim \frac{1}{2}\pi$ ). Questo fatto indusse Rutherford a supporre che gli atomi abbiano un nucleo centrale che alle particelle  $\alpha$  incidenti appare puntiforme rispetto alle dimensioni dell'intero atomo. Se il bersaglio fosse una sfera con carica uniformemente distribuita, sarebbe impedita la diffusione a grandi angoli, come nel modello atomico di J.J. Thomson, in cui elettroni e protoni spaziano nello stesso volume. Con l'ipotesi di un nucleo atomico concentrato, responsabile della diffusione, e di elettroni esterni, semplici spettatori inerti, si ottiene invece la (4.18) che riproduce i dati sperimentali di Geiger e Marsden<sup>13</sup>.

<sup>11</sup> G. Wentzel: *Zwei Bemerkungen über die Zerstreung korpuskularer Strahlen als Beugungerscheinung* [Due osservazioni sulla diffusione di raggi corpuscolari come fenomeno di diffrazione], *Zeitschrift für Physik* **40** (1926) 590–593.

<sup>12</sup> E. Rutherford: *loc. cit.* (cfr. n. 15 p. 64).

<sup>13</sup> H. Geiger e E. Marsden: *loc. cit.* (cfr. n. 15 p. 64); *The laws of deflection of  $\alpha$ -particles through large angles* [Le leggi della deflessione di particelle  $\alpha$  a grandi angoli], *Philosophical Magazine* **25** (1913) 604–623.

J.J. Thomson: *loc. cit.* (cfr. n. 14 p. 64).

XII.5. Il metodo dello sviluppo in onde parziali

Nel caso di potenziale a simmetria sferica il calcolo dell'ampiezza di diffusione (2.28) o (2.29) può essere sviluppato senza approssimazioni con il metodo dello sviluppo in onde parziali. Esso consiste nello sviluppare la funzione d'onda sulla base delle soluzioni dell'equazione agli autovalori che siano anche autofunzioni del momento angolare.

Per l'onda piana vale in generale lo sviluppo (V.6.8),

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{lm} i^l j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{lm}^*(\alpha, \beta), \quad (5.1)$$

dove  $(\theta, \phi)$  sono gli angoli polari di  $\mathbf{r}$ ,  $(\alpha, \beta)$  quelli di  $\mathbf{k}$  e  $j_l(kr)$  è una funzione di Bessel sferica,

$$j_l(x) = (-)^l x^l \left( \frac{d}{x dx} \right)^l \frac{\sin x}{x}, \quad (5.2)$$

che possiede i seguenti andamenti asintotici (cfr. Esempio B.2):

$$j_l(x) \sim \frac{x^l}{(2l+1)!!}, \quad x \ll l, \quad (5.3)$$

$$j_l(x) \sim \frac{1}{x} \sin(x - \frac{1}{2}l\pi), \quad x \gg l. \quad (5.4)$$

Per il sistema di riferimento scelto, con  $z$  parallelo a  $\mathbf{k}$ ,  $\alpha = 0$ , si ha

$$Y_{lm}(0, \beta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}. \quad (5.5)$$

Siccome

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta), \quad (5.6)$$

si può riscrivere la (5.1) nella forma

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (5.7)$$

Se il potenziale è a simmetria sferica, anche per la soluzione del problema d'urto si può utilizzare uno sviluppo in onde parziali del tipo (5.7):

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \sum_l i^l (2l+1) R_l(r) P_l(\cos \theta), \quad (5.8)$$

dove  $R_l(r)/kr$  è la parte radiale della funzione  $\Psi(\mathbf{r})$ . La funzione  $R_l(r)$  soddisfa all'equazione radiale dell'equazione di Schrödinger stazionaria (V.5.12),

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] R_l(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r) R_l(r), \quad (5.9)$$

in cui l'autovalore di energia  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$  è positivo. Naturalmente occorre imporre alla funzione radiale condizioni di regolarità all'origine. Per potenziali  $V(r) \sim 1/r^{1+\epsilon}$ , ciò comporta che per  $r \rightarrow 0$  sia  $R_l(r) \sim r^{l+1}$  e quindi

$$R_l(0) = 0. \quad (5.10)$$

Però per conoscere l'ampiezza di diffusione non è necessario risolvere la (5.9): basta conoscere l'andamento asintotico della  $R_l(r)$  a grandi  $r$ . Questo si può ottenere riconoscendo che  $R_l(r)/kr$  deve ridursi a  $j_l(kr)$  per  $V(r) \equiv 0$ . Per grandi  $r$  l'andamento asintotico (5.4) della funzione di Bessel sferica,

$$\begin{aligned} j_l(kr) &\sim \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi) \\ &= \frac{i}{2kr} \left[ e^{-i(kr-l\pi/2)} - e^{i(kr-l\pi/2)} \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

risulta somma di un contributo di onda sferica entrante e di uno di onda sferica uscente. Nel passaggio dal caso libero al caso dell'urto l'effetto del potenziale si traduce in una variazione di flusso uscente. Perciò l'onda sferica uscente viene modificata dal potenziale attraverso un fattore  $S_l$ , in generale complesso, mentre l'onda entrante risulta inalterata:

$$\frac{1}{kr} R_l(r) \sim \frac{i}{2kr} \left[ e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{i(kr-l\pi/2)} \right]. \quad (5.12)$$

La (5.12) può anche risciversi nella forma

$$\frac{1}{kr} R_l(r) \sim \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi) + \frac{i}{2k} (-i)^l (1 - S_l) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (5.13)$$

che mette meglio in evidenza la modifica introdotta dal potenziale rispetto al caso libero. Infatti, il primo termine della (5.13) è il contributo asintotico  $l$ -esimo (5.11) all'onda piana incidente, mentre il secondo termine rappresenta il contributo  $l$ -esimo all'ampiezza di diffusione. Si ha dunque

$$\begin{aligned} f(\theta, \phi) &\equiv f(\theta) \\ &= \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(1 - S_l) P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (5.14)$$

La dipendenza da  $\phi$  scompare nell'ampiezza di diffusione per la particolare simmetria cilindrica attorno all'asse  $z$  imposta dalle condizioni sperimentali: fascio incidente

nella direzione  $z$  con un potenziale che è anche invariante per rotazioni intorno all'asse  $z$ .

Se l'urto è puramente elastico, c'è conservazione di flusso, per cui  $|S_l| = 1$ . Si può allora porre

$$S_l = e^{2i\delta_l}, \quad (5.15)$$

$$S_l - 1 = 2ie^{i\delta_l} \sin \delta_l. \quad (5.16)$$

Inoltre dalla (5.12) con la (5.15) si ottiene

$$R_l(r) \sim e^{i\delta_l} \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l). \quad (5.17)$$

La (5.17) indica che la presenza del potenziale che provoca l'urto puramente elastico ha l'effetto di introdurre nell'onda parziale  $l$ -esima uno sfasamento  $\delta_l$  rispetto al caso libero (5.11). Tale sfasamento  $\delta_l$  dipende dal potenziale, ma il suo calcolo non richiede esplicitamente la risoluzione della (5.9) per tutti gli  $r$ .

Con la (5.15), l'ampiezza di diffusione (5.14) si riscrive in termini di sfasamenti:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta). \quad (5.18)$$

La sezione d'urto differenziale diventa

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta)|^2 \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) \\ &\quad \times \cos(\delta_l - \delta_{l'}) \sin \delta_l \sin \delta_{l'} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ricordando l'ortogonalità tra i polinomi di Legendre,

$$\int d\Omega P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (5.20)$$

si può ricavare l'espressione della sezione d'urto totale:

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (5.21)$$

Alla sezione d'urto totale ogni onda porta il contributo indipendente

$$\begin{aligned} \sigma_l &= 4\pi \bar{\lambda}^2 (2l+1) \sin^2 \delta_l \\ &= \pi \bar{\lambda}^2 (2l+1) |1 - S_l|^2, \end{aligned} \quad (5.22)$$

*Determinazione degli sfasamenti per l'urto elastico*

dove  $\lambda = 1/k$  è, a parte un fattore  $2\pi$ , la lunghezza d'onda delle particelle che subiscono l'urto elastico nel moto relativo. Il fattore  $(2l + 1)$  nella (5.22) tiene conto della molteplicità associata all'onda  $l$ -esima ( $|m| \leq l$ ) e il fattore  $\pi \lambda^2$  rappresenta l'area del cerchio di raggio  $\lambda$ , cioè l'area della sezione offerta dal bersaglio alla radiazione incidente di lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi \lambda$ . Quindi la sezione d'urto totale per l'urto elastico è data dalla sezione del bersaglio esplorata dalla radiazione incidente,  $\pi \lambda^2$ , ridotta per un fattore che tiene conto degli sfasamenti causati dal potenziale di interazione tra proiettile e bersaglio nelle varie onde parziali. Dato che, per la (5.15), al variare dell'energia alla quale avviene l'urto elastico, gli sfasamenti  $\delta_l$  variano tra 0 e  $\pi$  (modulo  $\pi$ ), il massimo di  $\sigma_l$  si ottiene quando  $\delta_l = \pi/2$ . In tali condizioni, il contributo  $l$ -esimo all'ampiezza di diffusione (5.18) è puramente immaginario.

*XII.6. Determinazione degli sfasamenti per l'urto elastico*

Per un potenziale a simmetria sferica il metodo delle onde parziali è esatto e nel caso di urto elastico ha il pregio di fornire la sezione d'urto in termini di sfasamenti, senza il bisogno di determinare la funzione d'onda in tutti i punti dello spazio. D'altra parte la sua utilità pratica risiede nella possibilità di far intervenire un numero finito di onde parziali, possibilmente basso, e nella capacità ulteriore di calcolare direttamente gli sfasamenti.

Una limitazione sul numero di onde parziali necessarie può essere riconosciuta in termini semiclassici. Se ci si pone a distanze  $r \gg d$ , dove  $d$  è il raggio d'azione del potenziale, nella (5.9) risulta efficace solo il termine centrifugo repulsivo  $l(l + 1)/r^2$ ; si può allora calcolare la distanza relativa di massimo avvicinamento tra proiettile e bersaglio, utilizzando la condizione che l'energia  $E$  deve essere non inferiore al contributo centrifugo,

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l + 1)}{r^2}, \quad (6.1)$$

da cui risulta

$$r \geq \frac{1}{k} \sqrt{l(l + 1)}. \quad (6.2)$$

In termini classici, fissato il momento angolare con cui avviene il moto relativo, la distanza di massimo avvicinamento è legata al *parametro d'impatto* (o *d'urto*)  $b$  relativo alla traiettoria del proiettile (fig. 6.1), secondo la relazione

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = b p = b \hbar k. \quad (6.3)$$

Coinvolgendo l'autovalore del momento angolare, deve essere

$$b \hbar k \sim \hbar l, \quad (6.4)$$

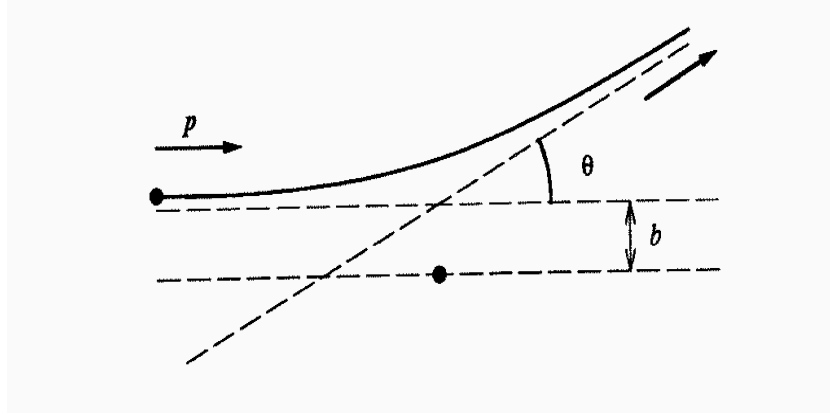


Fig. 6.1. Descrizione semiclassica dell'urto e definizione del parametro d'impatto  $b$ .

che è in accordo con la (6.2). Pertanto dalla (6.4) segue che il contributo sostanziale alla sezione d'urto proviene dalle onde con

$$l \leq b k, \quad (6.5)$$

per le quali è sensibile l'interazione col bersaglio e apprezzabile lo sfasamento. Pertanto, per un dato potenziale, la limitazione sugli  $l$  è fissata dall'energia.

Per un'energia sufficientemente bassa potrebbe contribuire solo l'onda  $s$  ( $l = 0$ ). In tal caso la sezione d'urto differenziale,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \chi^2 \sin^2 \delta_0, \quad (6.6)$$

è isotropa. Se può contribuire anche l'onda  $p$  ( $l = 1$ ) si ha:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \chi^2 \left[ \sin^2 \delta_0 + 6 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_0 - \delta_1) \cos \theta + 9 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta \right], \quad (6.7)$$

in cui il primo termine è il puro contributo di onda  $s$ , il terzo è il puro contributo di onda  $p$  e il secondo rappresenta un termine di interferenza tra onda  $s$  e onda  $p$ . La distribuzione angolare corrispondente alla situazione (6.7) permette quindi di avere informazioni sui vari termini, con la possibilità di determinare sperimentalmente gli sfasamenti. È questo infatti il procedimento per estrarre l'informazione dai dati sperimentali. Scritta la sezione d'urto nella forma generale

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \chi^2 \sum_m c_m \cos^m \theta, \quad (6.8)$$

si determinano i coefficienti  $c_m$  in modo da riprodurre l'andamento sperimentale. Il valore massimo di  $m$  è fissato dall'energia. I coefficienti  $c_m$  così ottenuti forniscono informazioni sugli sfasamenti delle onde coinvolte.



**Esercizio 6.1**

Dal confronto con i dati di un esperimento di diffusione elastica a una determinata energia si è trovato che basta limitare la somma nella (6.8) a  $m = 2$ , con  $c_0 = 0.587$ ,  $c_1 = 0.611$ ,  $c_2 = 0.271$ . Determinare gli sfasamenti delle onde parziali coinvolte.

Talvolta non è necessario ricorrere allo sviluppo (6.8), perché in corrispondenza di una particolare energia  $E_0$  si presenta un picco pronunciato della sezione d'urto totale (fig. 6.2) e un esame della distribuzione angolare a questa energia indica un andamento ben descritto da un unico polinomio di Legendre,  $P_l(\cos \theta)$ , e quindi il prevalere della sola onda parziale  $l$ -esima. È già stato rilevato che gli sfasamenti  $\delta_l(E)$ , al variare dell'energia  $E$ , acquistano valori compresi tra 0 e  $\pi$  (modulo  $\pi$ ) e quando assumono il valore  $\pi/2$  determinano il massimo contributo alla sezione d'urto elastico per la corrispondente onda parziale  $l$ -esima. Se il passaggio di  $\delta_l(E)$  attraverso il valore  $\pi/2$  avviene rapidamente intorno al valore d'energia  $E = E_0$ , mentre tutti gli altri sfasamenti variano lentamente, il contributo dell'onda  $l$ -esima diventa dominante e fortemente piccato in corrispondenza dell'energia  $E_0$ . Si dice in tal caso che esiste una *risonanza* nell'onda parziale  $l$ -esima.

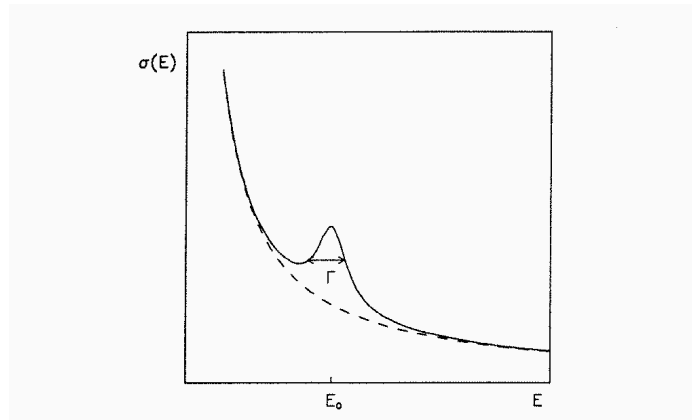


Fig. 6.2. Andamento risonante della sezione d'urto in funzione dell'energia.

Ricorrendo all'identità

$$e^{i\delta_l} \sin \delta_l = \frac{1}{\cot \delta_l - i} \quad (6.9)$$

e tenendo presente che, mentre  $\delta_l$  varia tra 0 e  $\pi$ , la cotangente varia tra  $+\infty$  e  $-\infty$  e passa per lo zero in corrispondenza di  $E_0$ , nell'intorno di  $E_0$  si può sviluppare la cotangente in serie di potenze di  $E - E_0$ , fermandosi al termine lineare:

$$\cot \delta_l \sim -\frac{2}{\Gamma}(E - E_0), \quad (6.10)$$

con

$$-\frac{2}{\Gamma} \equiv \frac{d}{dE} \cot \delta_l \Big|_{E=E_0} = -\frac{d\delta_l(E)}{dE} \Big|_{E=E_0}. \quad (6.11)$$

Con questa approssimazione l'ampiezza di diffusione per l'onda  $l$ -esima che compare nella (5.18) può scriversi

$$f_l(\theta) = -\frac{1}{k}(2l+1) \frac{\Gamma/2}{E - E_0 + i\Gamma/2} P_l(\cos \theta). \quad (6.12)$$

Di conseguenza, il contributo  $l$ -esimo alla sezione d'urto totale risulta

$$\sigma_l = 4\pi \bar{\lambda}^2 (2l+1) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_0)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (6.13)$$

La forma del picco di  $\sigma_l$ , centrato in  $E = E_0$ , è descritta da una *lorentziana*, la cui larghezza a mezza altezza è pari a  $\Gamma$ .

Questa espressione di  $\sigma_l$  è la *formula di Breit-Wigner*<sup>14</sup> per una risonanza in  $E = E_0$ . Data l'approssimazione (6.10), essa è valida solo nell'intorno di  $E = E_0$ .

Da un punto di vista fisico la presenza di una risonanza nella sezione d'urto causata dall'onda parziale  $l$ -esima può essere interpretata come la formazione di uno stato metastabile in onda  $l$  tra proiettile e bersaglio, con vita media pari a  $T = \hbar/\Gamma$ , come già discusso al paragrafo IV.4.

Da un punto di vista teorico generale, la determinazione degli sfasamenti implica la conoscenza del potenziale  $V(r)$  che compare nella (5.9). Si può procedere nel modo seguente. Siano date la (5.9),

$$\frac{d^2 R_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right] R_l = 0, \quad (6.14)$$

e la corrispondente equazione per il caso libero,

$$\frac{d^2 g_l}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] g_l = 0, \quad (6.15)$$

con le condizioni

$$R_l(0) = 0, \quad (6.16)$$

$$g_l(kr) = kr j_l(kr), \quad g_l(0) = 0. \quad (6.17)$$

Moltiplicata la (6.15) per  $R_l$  e la (6.14) per  $g_l$ , le si sottraggano membro a membro e si integri il risultato tra 0 e  $\rho$ . Si ottiene

<sup>14</sup> Gregory Breit (1899–1981) e E.P. Wigner: *Capture of Slow Neutrons [Cattura di neutroni lenti]*, Physical Review **49** (1936) 519–531.

Determinazione degli sfasamenti per l'urto elastico

$$\left[ g_l \frac{dR_l}{dr} - R_l \frac{dg_l}{dr} \right]_{r=\rho} = \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\rho dr g_l(r) V(r) R_l(r). \quad (6.18)$$

Inserendo gli andamenti asintotici per  $kr \gg l$  delle due funzioni coinvolte,  $g_l$  e  $R_l$ , cioè

$$\begin{aligned} g_l(kr) &\sim \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi), \\ R_l(r) &\sim e^{i\delta_l} \sin(kr - \frac{1}{2}l\pi + \delta_l), \end{aligned} \quad (6.19)$$

per  $\rho$  sufficientemente grande la (6.18) fornisce lo sfasamento  $\delta_l$  tramite la relazione

$$k e^{i\delta_l} \sin \delta_l = -\frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\rho dr g_l(r) V(r) R_l(r). \quad (6.20)$$

*Esempio 6.1*

Oltre alla conoscenza di  $V(r)$ , il calcolo dell'integrale nella (6.20) richiede quella di  $R_l$  limitatamente all'intervallo  $(0, \rho)$ , definito in pratica dal raggio d'azione del potenziale  $V(r)$ . Si può allora cercare una stima dello sfasamento utilizzando l'approssimazione di Born, senza risolvere esplicitamente la (6.14) per  $R_l$ . Ciò significa sostituire  $R_l$  con  $g_l$  nell'equazione (6.20):

$$k e^{i\delta_l} \sin \delta_l \simeq -\frac{2mk^2}{\hbar^2} \int_0^\rho dr r^2 V(r) [j_l(kr)]^2. \quad (6.21)$$

Utilizzando la (6.21), si può verificare che gli sfasamenti vanno rapidamente decrescendo al crescere di  $l$  con l'energia. Si assuma infatti per semplicità un potenziale del tipo

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq d, \\ 0, & r > d. \end{cases} \quad (6.22)$$

Per  $kd \ll 1$ , come nell'ipotesi di bassa energia, e tenendo presente la (5.3), si può riscrivere la (6.21) nella forma

$$e^{i\delta_l} \sin \delta_l \simeq \frac{2md^2}{\hbar^2} V_0 \frac{(kd)^{2l+1}}{(2l+3)[(2l+1)!!]^2}. \quad (6.23)$$

Per l'onda  $s$  si ottiene

$$\sin \delta_0 \simeq \frac{2md^2}{\hbar^2} V_0 \frac{1}{3} kd, \quad (6.24)$$

che permette l'ulteriore approssimazione:  $\sin \delta_0 \simeq \delta_0$ . Per l'onda  $p$  si ha

$$\sin \delta_1 \simeq \delta_1 \simeq \delta_0 \frac{(kd)^2}{15} \ll \delta_0, \quad (6.25)$$

e così via per le onde successive, i cui sfasamenti sono via via ridotti ogni  $l$  successivo di un fattore  $(kd)^2$ .

*Esempio 6.2*

Si presenta qui un caso estremo di bassa energia per cui nella diffusione elastica contribuisce solo l'onda  $s$  ( $l = 0$ ). Quindi la funzione radiale per l'urto elastico da potenziale a simmetria sferica soddisfa all'equazione

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right)R_0(r) = \frac{2m}{\hbar^2}V(r)R_0(r), \quad (6.26)$$

con la condizione

$$R_0(0) = 0. \quad (6.27)$$

A grandi  $r$  l'andamento asintotico è

$$R_0(r) \sim C \sin(kr + \delta_0). \quad (6.28)$$

Allora, per il potenziale (6.22) e con le definizioni

$$K^2 = k^2 + K_0^2, \quad K_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}, \quad (6.29)$$

la soluzione della (6.26) risulta

$$R_0(r) = C_1 \sin(Kr), \quad r \leq d. \quad (6.30)$$

Lo sfasamento  $\delta_0$  è ottenibile imponendo la continuità della funzione e della sua derivata in  $r = d$  tra la parte interna al potenziale e quella che si riferisce all'andamento asintotico. Ciò equivale a imporre la continuità della derivata logaritmica di  $R_0$  in  $r = d$ , cioè

$$k \cot(kd + \delta_0) = K \cot Kd \equiv D^{-1}, \quad (6.31)$$

da cui

$$kD = \tan(kd + \delta_0)$$

e quindi

$$\delta_0 = \tan^{-1}(kD) - kd. \quad (6.32)$$

Per l'ipotesi di bassa energia,  $kd \ll 1$ , la (6.32) può essere riscritta

$$\tan \delta_0 \simeq k(D - d) = kd \left[ \frac{\tan Kd}{Kd} - 1 \right]. \quad (6.33)$$

Noto lo sfasamento, si può calcolare la sezione d'urto. Tenendo presente che  $\delta_0$  è piccolo, per cui si può confondere  $\sin \delta_0$  con  $\tan \delta_0$ , si ha

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \simeq 4\pi(D - d)^2 \\ &= 4\pi d^2 \left[ 1 - \frac{\tan Kd}{Kd} \right]^2. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Se si verifica la condizione

$$\tan Kd = Kd, \quad (6.35)$$

la sezione d'urto elastico (6.34) si annulla. Ciò è noto come *effetto Ramsauer*<sup>15</sup>, dal nome di chi nel 1921 notò che nell'urto elastico di elettroni da atomi di gas inerti, come Ar, Kr, Xe, la sezione d'urto è praticamente nulla in corrispondenza di un'energia di 0.7 eV degli elettroni incidenti. La condizione (6.35) si realizza allora per tale energia e ciò fornisce informazioni sulla profondità  $V_0$  e sul raggio d'azione  $d$  del potenziale (6.22).

In generale però è

$$\tan Kd \neq Kd \quad (6.36)$$

e la sezione d'urto non si annulla, ma anzi può essere riscritta nella forma

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 \simeq 4\pi a^2, \quad (6.37)$$

dove  $a$  prende il nome di *lunghezza di diffusione* (= *scattering length*). Il significato della lunghezza di diffusione è quello delle dimensioni lineari del bersaglio, efficaci a bassa energia nel determinare la sezione d'urto elastico. Da un punto di vista matematico, la lunghezza di diffusione è deducibile dall'estrapolazione verso l'origine dell'andamento asintotico (6.28) di  $R_0(r)$ ,

$$\begin{aligned} R_0(r) &\sim C \sin(kr + \delta_0) \\ &= C \sin \delta_0 (\cos kr + \cot \delta_0 \sin kr). \end{aligned}$$

Siccome  $kr \ll 1$ , si può porre

$$R_0(r) \sim C \sin \delta_0 \left(1 - \frac{r}{a}\right), \quad (6.38)$$

dove si è definito

$$\tan \delta_0 \equiv -ka. \quad (6.39)$$

Dalla (6.39) segue la (6.37). Dunque la lunghezza di diffusione è determinata dal valore di  $r$  che azzerà l'estrapolazione verso l'origine della parte asintotica di  $R_0(r)$ .

### Esempio 6.3

Nell'interpretazione della (6.37) si possono distinguere vari casi, a seconda del valore di  $Kd$  nella (6.36), e quindi della profondità della buca di potenziale.

a)  $0 < Kd < \frac{\pi}{2}$

Dalla (6.33) segue  $\delta_0 > 0$  e quindi dalla (6.39) è  $a < 0$ . La situazione, illustrata in fig. 6.3, indica che in tali condizioni non si può instaurare uno stato legato tra proiettile e bersaglio, mentre è possibile l'urto elastico.

<sup>15</sup> Karl Ramsauer (1879–1955): *Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen [Sezione d'urto di molecole di gas sottoposte a elettroni lenti]*, *Annalen der Physik* **64** (1921) 513–540; **66** (1921) 546–558; **72** (1923) 345–352.

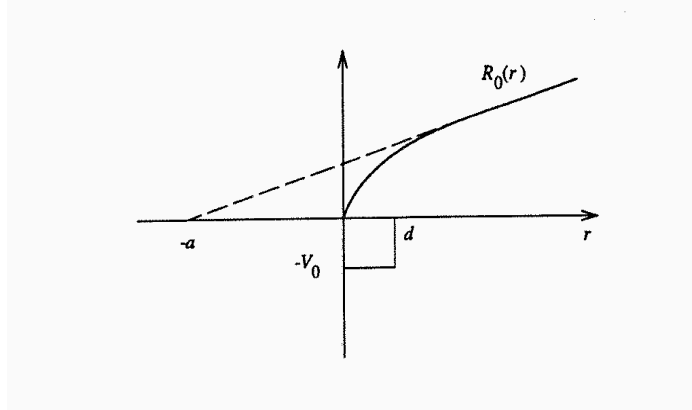


Fig. 6.3. Una lunghezza di diffusione negativa corrisponde a uno stato che descrive la diffusione.

b)  $Kd = \frac{\pi}{2}$

Ciò comporta  $\delta_0 \rightarrow \pi/2$  e quindi anche  $a \rightarrow -\infty$  (fig. 6.4),  $\sigma \rightarrow \infty$ , con la conseguenza che nel limite di energia che tende a zero si può avere anche uno stato legato tra proiettile e bersaglio in onda  $s$ : ciò provoca un andamento risonante nella sezione d'urto. In generale la risonanza si verifica per

$$Kd = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$$

e sono possibili stati legati in onda  $s$ , di cui il primo per  $E \simeq 0$ <sup>16</sup>.

c)  $\frac{\pi}{2} < Kd < \pi$

In questo caso  $\delta_0 < 0$  e quindi  $a > 0$  (fig. 6.5). L'estrapolazione all'origine, (6.38), corrisponde in questo caso a una funzione che per  $r \gg d$  possiede un andamento asintotico del tipo  $e^{-r/a} \sim e^{-kr}$ , tipico di uno stato legato.

*Esempio 6.4*

Le considerazioni degli Esempi 6.2 e 6.3 si possono applicare al sistema nucleone–nucleone. Lo studio della diffusione a bassa energia consente di verificare che l'unico sistema legato possibile per l'urto neutrone–protone è quello per lo stato simmetrico di spin  $^3S_1$  (tripletto,  $S = 1$ ), che può dare origine allo stato fondamentale del deuterio: in tal caso la lunghezza di diffusione è

$$a_t = 5.424(4) \text{ fm.}$$

<sup>16</sup> È questo un caso particolare del *teorema di Levinson*: esso stabilisce che il numero  $n_l$  di stati legati in onda  $l$ , possibili per un dato potenziale, è dato dalla relazione:  $\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = n_l\pi$ , dove gli sfasamenti  $\delta_l(E)$  sono calcolati a energia uguale a 0 e ad altissima energia. D'altra parte è ragionevole supporre  $\delta_l(\infty) = 0$ , per cui  $\delta_l(0)$  fornisce direttamente  $n_l$ .

Norman Levinson (n. 1912): *On the Uniqueness of the Potential in a Schrödinger Equation for a Given Asymptotic Phase [Unicità del potenziale in un'equazione di Schrödinger per una data fase asintotica]*, Matematisk-Fysiske Meddelelser det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab **25** (1949), n. 9, pp. 1–29.

Determinazione degli sfasamenti per l'urto elastico

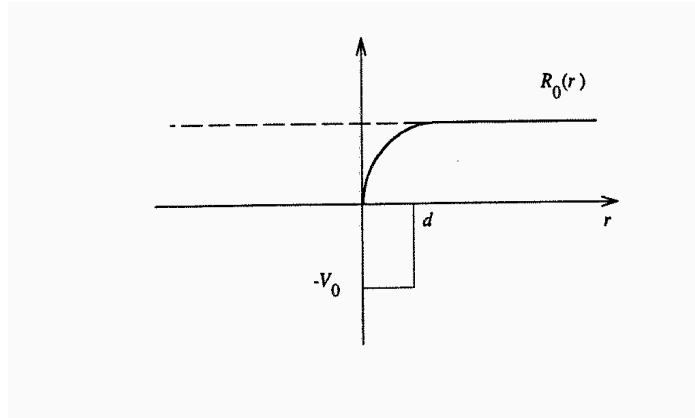


Fig. 6.4. Stato risonante.

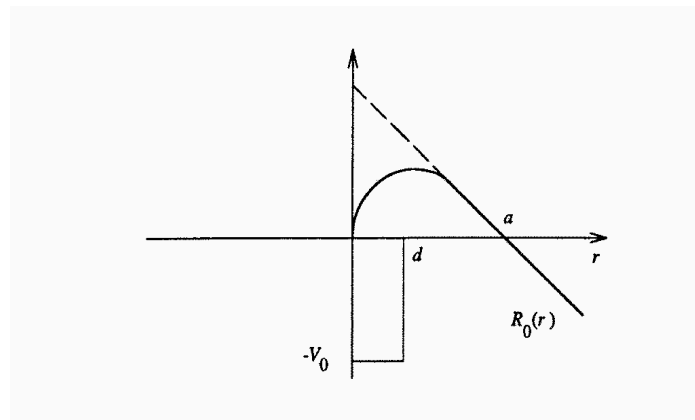


Fig. 6.5. Una lunghezza di diffusione positiva permette la formazione di uno stato legato.

Invece lo stato antisimmetrico di spin  $^1S_0$  (singoletto,  $S = 0$ ) per l'urto neutrone–protone fornisce una lunghezza di diffusione negativa,

$$a_s = -23.748(10) \text{ fm.}$$

Anche il sistema protone–protone e il sistema neutrone–neutrone hanno una lunghezza di diffusione negativa:

$$a_p = -7.809 \ 8(23) \text{ fm,}$$

$$a_n = \begin{cases} -18.45(46) \text{ fm} \\ -16.73(47) \text{ fm.} \end{cases}$$

I due valori forniti per  $a_n$  sono stati ricavati dall'analisi delle reazioni  $D(\pi^-, \gamma)2n$  e  $D(n, p)2n$ , rispettivamente. La minore precisione in questo caso rispetto agli altri è dovuta alle difficoltà che si incontrano nella rivelazione di particelle neutre e nell'estrarre il contributo dei neutroni per sottrazione da quello dei protoni in un processo d'urto su

deuterio <sup>17</sup>.

### XII.7. Diffusione con assorbimento

Il metodo delle onde parziali fin qui è stato utilizzato nel caso di urto puramente elastico. Ciò implica la definizione di sfasamento dell'onda diffusa tramite la posizione (5.15). Essa corrisponde al fatto che tutte le particelle incidenti hanno solo due possibilità: o proseguono indisturbate oltre il bersaglio, oppure vengono deflesse conservando la loro energia cinetica iniziale. Globalmente il flusso entrante uguaglia il flusso uscente. Se, accanto all'urto elastico, può avvenire anche una diffusione anelastica, in quanto cambia semplicemente l'energia cinetica della particella diffusa, oppure si verificano reazioni di vario tipo che coinvolgono proiettile e bersaglio, allora in un esperimento atto a rivelare solo l'urto elastico si ha perdita di flusso rispetto a quello incidente. Ciò significa che il coefficiente  $S_l$  dell'onda sferica uscente nella (5.12) ha in generale modulo inferiore o al massimo uguale a uno, cioè

$$|S_l| \leq 1.$$

Volendo preservare il concetto di sfasamento, si può porre

$$S_l = \eta_l e^{2i\delta_l}, \quad 0 \leq \eta_l \leq 1. \quad (7.1)$$

Il coefficiente reale  $\eta_l$ , detto *parametro di anelasticità*, permette di tenere conto della perdita di flusso nel canale elastico provocata dai processi anelastici. Se non vengono singolarmente osservati, questi hanno solo un effetto di assorbimento, che per ogni onda  $l$  è pari a  $(1 - \eta_l^2)$ .

L'ampiezza di diffusione elastica in presenza di assorbimento deriva dalla (5.14) mediante la (7.1):

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l P_l(\cos \theta), \quad (7.2)$$

dove

$$a_l = \frac{1}{2}i(1 - S_l) = \frac{1}{2}i(1 - \eta_l \cos 2\delta_l - i\eta_l \sin 2\delta_l). \quad (7.3)$$

Dalle (5.21) e (5.22) con la (7.1), la sezione d'urto elastico è:

---

<sup>17</sup> O. Dumbrajs, R. Koch, H. Pilkhun, G.C. Oades, H. Behrens, J.J. De Swart e P. Kroll: *Compilation of Coupling Constants and Low-Energy Parameters [Compilazione di costanti di accoppiamento e parametri di bassa energia]*, Nuclear Physics **B216** (1983) 277-335.



*Diffusione con assorbimento*

$$\begin{aligned}\sigma_{el} &= \pi \bar{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |1 - S_l|^2 \\ &= \pi \bar{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 + \eta_l^2 - 2\eta_l \cos 2\delta_l).\end{aligned}\tag{7.4}$$

Siccome per ogni onda  $(1 - \eta_l^2)$  rappresenta la perdita di flusso nel canale elastico e quindi il flusso relativo ai processi anelastici, si può ottenere la sezione d'urto totale per il complesso di tutti i processi anelastici con la seguente espressione:

$$\sigma_{anel} = \pi \bar{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \eta_l^2).\tag{7.5}$$

Pertanto la sezione d'urto totale, somma del contributo elastico (7.4) e di tutto il contributo anelastico (7.5), risulta

$$\begin{aligned}\sigma_{tot} &= \sigma_{el} + \sigma_{anel} \\ &= 2\pi \bar{\lambda}^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (1 - \eta_l \cos 2\delta_l).\end{aligned}\tag{7.6}$$

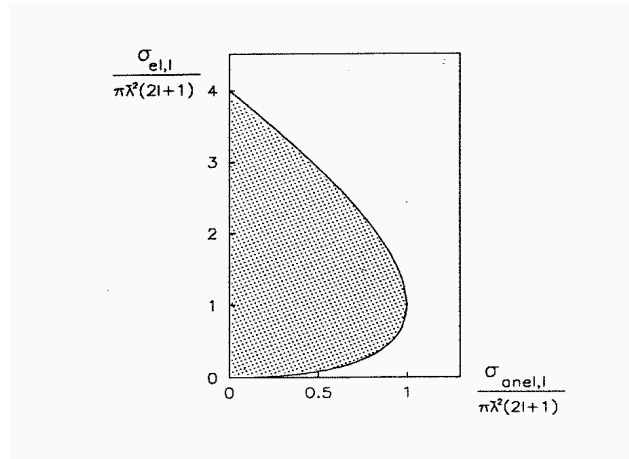


Fig. 7.1. La regione ombreggiata corrisponde alle situazioni possibili in presenza di diffusione anelastica.

È interessante considerare i contributi dell'onda  $l$ -esima alle sezioni d'urto elastica e anelastica (fig. 7.1). Per le (7.4) e (7.5) si trova

$$\sigma_{el,l} = \pi \bar{\lambda}^2 (2l+1) (1 + \eta_l^2 - 2\eta_l \cos 2\delta_l) \leq 4\pi \bar{\lambda}^2 (2l+1),\tag{7.7}$$

$$\sigma_{anel,l} = \pi \bar{\lambda}^2 (2l + 1)(1 - \eta_l^2) \leq \pi \bar{\lambda}^2 (2l + 1). \quad (7.8)$$

Si possono trarre alcune conseguenze:

- a) ogni reazione, o comunque ogni processo anelastico ( $\eta_l < 1, \sigma_{anel} \neq 0$ ), è sempre accompagnato da urto elastico ( $\sigma_{el} \neq 0$ );
- b) il massimo del contributo elastico (7.7) è ottenibile solo in assenza di processi anelastici ( $\eta_l = 1$ ). Esso è quattro volte maggiore del massimo del contributo anelastico totale (7.8), in conseguenza della coerenza tra onda incidente e onda diffusa nel canale elastico che produce interferenza costruttiva;
- c) il massimo di  $\sigma_{anel,l}$  si ottiene per  $\eta_l = 0$ . In tal caso risulta

$$\sigma_{anel,l} = \sigma_{el,l} = \pi \bar{\lambda}^2 (2l + 1) \quad (\eta_l = 0). \quad (7.9)$$

Come si può verificare con l'aiuto della fig. 7.2, tale risultato rappresenta l'area della zona trasversale  $l$ -esima offerta dal bersaglio al fascio incidente di lunghezza d'onda  $\lambda = 2\pi \bar{\lambda}$ :

$$\pi \bar{\lambda}^2 (l + 1)^2 - \pi \bar{\lambda}^2 l^2 = \pi \bar{\lambda}^2 (2l + 1).$$

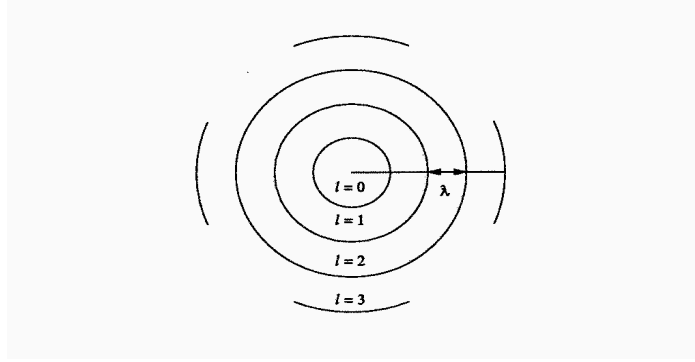


Fig. 7.2. Il bersaglio è visto dal fascio incidente secondo corone circolari di ordine  $l$ .

#### Esempio 7.1

L'ampiezza di diffusione (7.3) per l'onda parziale  $l$ -esima può essere utilmente rappresentata nel piano complesso ( $2 \operatorname{Re} a_l, 2 \operatorname{Im} a_l$ ) ricorrendo al cosiddetto *grafico di Argand*<sup>18</sup> (fig. 7.3). Per l'urto puramente elastico ( $\eta_l = 1$ ), i punti del grafico giacciono su

<sup>18</sup> G. Höhler, G. Hebel e J. Zwingerberger: *Applications of the Dispersion Relations for  $\pi N$  Forward Scattering [Applicazione delle relazioni di dispersione per la diffusione in avanti  $\pi N$ ]*, in *The International Conference on Elementary Particles (Aix-en-Provence, 1961)*, ed. E. Cremieu-Alcan, P. Falk-Vairant e O. Lebey, CEA, Saclay, 1962, vol. 1, pp. 485–486.

Il nome deriva da quello del matematico svizzero Jean Robert Argand (1768–1822) che inventò la rapp-

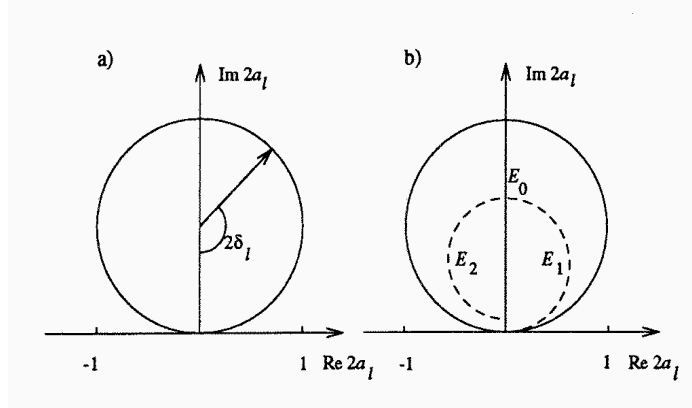


Fig. 7.3. Grafico di Argand per la rappresentazione dell'ampiezza di diffusione: a) caso puramente elastico, b) risonanza di Breit-Wigner nel caso anelastico.

di una circonferenza di raggio unitario con centro in  $a_l = +i$  e sono individuati dall'angolo  $2\delta_l$ . Al crescere dello sfasamento  $\delta_l$  con l'energia, la circonferenza viene ripetutamente percorsa in senso antiorario.

Se c'è una risonanza di Breit-Wigner all'energia  $E_0$ , e quindi per la (6.12)

$$a_l = -\frac{\Gamma/2}{E - E_0 + i\Gamma/2}, \quad (7.10)$$

in condizioni di risonanza allo sfasamento  $\delta_l = \frac{1}{2}\pi$  corrisponde il punto più alto del cerchio, mentre i punti che si ottengono per  $\delta_l = \frac{1}{4}\pi$ , cioè quando  $E = E_1 = E_0 - \frac{1}{2}\Gamma$ , e per  $\delta_l = \frac{3}{4}\pi$ , cioè quando  $E = E_2 = E_0 + \frac{1}{2}\Gamma$ , corrispondono al primo e al terzo quarto di circonferenza, determinando con la loro posizione il valore di  $\Gamma$ :  $\Gamma = E_2 - E_1$ .

In presenza di anelasticità ( $\eta_l < 1$ ), al variare dell'energia i punti del grafico descrivono una traiettoria spiraleggiante contenuta all'interno del cerchio unitario elastico. Nel caso ideale di un'unica risonanza di Breit-Wigner in presenza di anelasticità, il punto corrispondente alla risonanza ( $\delta_l = \frac{1}{2}\pi$ ) è quello più alto di una circonferenza di raggio  $\eta_l(E_0)$ , centrata sull'asse immaginario e contenente la spirale tracciata in senso antiorario al crescere dell'energia. Nel caso più generale anelastico, la risonanza può essere accompagnata da contributi non risonanti, lentamente variabili con l'energia, che modificano la situazione alterando il comportamento dell'ampiezza di diffusione e della corrispondente traiettoria nel piano complesso. Ciò rende più difficoltosa l'estrazione dal grafico di Argand del parametro di anelasticità e della posizione e della larghezza della risonanza stessa.

### Esempio 7.2

A titolo di esempio si consideri la diffusione da parte di un disco nero di raggio  $d$  a bordi nitidi. Ciò significa che il disco assorbe totalmente tutte le onde che vi incidono fino a un certo valore massimo  $L$  di  $l$ :

---

representazione geometrica dei numeri complessi, disponendo le radici  $n$ -esime dell'unità su di una circonferenza di raggio unitario.

J.R. Argand: *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Parigi, 1806. Il libro apparve anonimo e fu ristampato col nome dell'autore solo nel 1874.

$$\eta_l = 0, \quad l \leq L. \quad (7.11)$$

La condizione di bordo nitido permette di fissare  $L$  mediante la considerazione che il parametro di impatto massimo efficace deve essere  $d$ , cioè

$$L = kd. \quad (7.12)$$

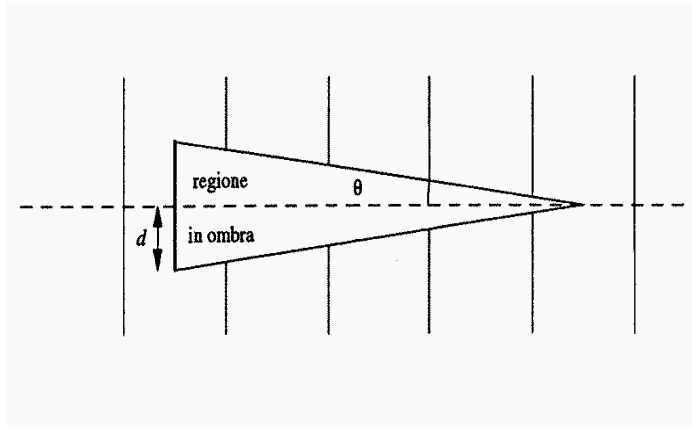


Fig. 7.4. Effetto ombra.

La condizione (7.11) tuttavia non esclude la possibilità di urto elastico. Anzi come già osservato nella (7.9), le sezioni d'urto elastica (7.4) e anelastica (7.5) diventano uguali tra di loro:

$$\sigma_{el} = \sigma_{anel} = \pi \lambda^2 \sum_{l=0}^L (2l + 1).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \sigma_{el} = \sigma_{anel} &\simeq \pi \lambda^2 L^2 \\ &= \pi d^2. \end{aligned} \quad (7.13)$$

La sezione d'urto anelastica corrisponde all'area del disco nero e al risultato che ci si aspetta anche classicamente. Però anche in presenza di assorbimento totale fino ad una certa onda  $l = L$ , il contributo di diffusione elastica non è nullo. Anzi è tale da rendere la sezione d'urto totale *doppia* rispetto all'area del disco nero:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{el} + \sigma_{anel} = 2\pi d^2. \quad (7.14)$$

Il fattore 2 che compare nella (7.14) è noto come *effetto ombra* ed è di natura tipicamente ondulatoria. In una teoria classica della propagazione ondulatoria, l'ombra prodotta dal disco svanisce a grandi distanze dopo il disco e il disco non si *vede* più. Ciò avviene ad una distanza  $R \sim d^2/\lambda$  alla quale il disco è visto da un angolo  $\theta \sim d/R$ . Il fenomeno si spiega con la diffusione dell'onda elastica che compensa l'ombra creata

*Teorema ottico per l'urto elastico*

dall'assorbimento: è come se il disco emettesse onde elastiche che interferiscono col fascio incidente provocando il raddoppio della sezione d'urto totale (fig. 7.4).

*XII.8. Teorema ottico per l'urto elastico*

Molti risultati ottenuti nella trattazione quantistica dei processi d'urto sono riconducibili a situazioni già note nell'ottica classica. Questo fatto non stupisce se si considera che la descrizione ondulatoria del moto di particelle ha caratteristiche comuni con quella classica della propagazione di un'onda che può subire diffusione, attenuazione, assorbimento. Un esempio delle possibili analogie è costituito dal cosiddetto *teorema ottico*, il cui risultato viene qui riconosciuto nel caso dell'urto elastico per semplice confronto di relazioni scritte nei paragrafi precedenti per l'ampiezza di diffusione e la sezione d'urto totale.

Dalla (5.18), tenendo presente che i polinomi di Legendre si riducono all'unità per  $\theta = 0$ , segue

$$\text{Im } f(0) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \sin^2 \delta_l. \quad (8.1)$$

Confrontando questo risultato con la (5.21) si trova

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(0). \quad (8.2)$$

Questo risultato, noto appunto come teorema ottico, indica che la sezione d'urto totale per l'urto elastico è determinata dalla parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione in avanti ( $\theta = 0$ ). La sezione d'urto totale rappresenta il flusso di particelle rimosso dal fascio incidente; in ottica ciò corrisponde alla misura dell'estinzione del fascio di luce incidente e si ottiene dal rapporto tra la potenza dissipata e la potenza incidente per unità di superficie dell'oggetto illuminato. La rimozione di flusso, come misurata a grandi distanze dal bersaglio, può avvenire solo come risultato di un'interferenza distruttiva tra l'onda incidente e quella diffusa elasticamente. Il contributo di interferenza è rilevante solo per la direzione in avanti, dove c'è effettiva sovrapposizione tra l'onda incidente e quella diffusa (Esempio 1.1). Il risultato (8.2) indica che tale interferenza è lineare nella parte immaginaria dell'ampiezza di diffusione.

Il teorema ottico è stato qui riscontrato nel caso di urto puramente elastico, ma vale anche per la diffusione con assorbimento trattata nel paragrafo XII.7. A tal fine basta confrontare la (7.2) e la (7.3) per  $\theta = 0$  con la (7.6) per ritrovare ancora la (8.2). Anzi il teorema ottico ha una validità del tutto generale che verrà dimostrata al paragrafo XII.13 anche in presenza di ogni processo anelastico incluso nel calcolo della sezione d'urto totale. Per ora ciò si intuisce dall'analogia con l'ottica e con l'interpretazione della sezione d'urto come flusso rimosso dal fascio incidente.

*Esercizio 8.1*

L'approssimazione di Born (4.3) per l'ampiezza di diffusione rispetta il teorema ottico?

Il risultato (8.2) indica anche la necessità di una parte immaginaria non nulla dell'ampiezza di diffusione elastica in avanti. Di conseguenza, l'approssimazione di Born, basata sull'ampiezza di diffusione (4.3) che per  $\theta = 0$  diventa puramente reale, viola il teorema ottico. Tuttavia questa grossa difficoltà di principio non ostacola l'uso generalizzato dell'approssimazione di Born, con risultati numerici utili per il confronto con i dati sperimentali a  $\theta \neq 0$ . D'altra parte, misure di urto elastico ad angoli in avanti hanno un grande interesse proprio in virtù del teorema ottico, ma sono anche estremamente difficili per la necessità di distinguere tra particelle che hanno subito l'urto elastico e particelle appartenenti al fascio incidente indisturbato.

*XII.9. Urto elastico di particelle identiche*

Finora si sono studiati i processi d'urto senza prendere in considerazione gradi di libertà interni delle particelle in gioco. In linea di principio non è difficile tenere conto di altri numeri quantici oltre all'energia e all'impulso e ciò sarà fatto in generale nei paragrafi XII.12 – XII.14. D'altra parte le particelle quantistiche, sia i bosoni che i fermioni, sono tra di loro indistinguibili. Pertanto, anche a prescindere dal loro eventuale spin, da un punto di vista sperimentale non si è in grado di distinguere tra le due situazioni in fig. 9.1 che si possono verificare quando si rivelano le particelle diffuse ad un angolo  $\theta$  nel sistema del centro di massa: nel moto relativo non si avverte lo scambio tra la particella 1 e la particella 2.

In generale la descrizione deve essere invariante per lo scambio  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ , con  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ , e quindi per  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  e  $\phi \rightarrow \phi + \pi$ . Allora asintoticamente la funzione d'onda non può più essere semplicemente data dalla condizione (1.11), ma deve essere una funzione simmetrica per lo scambio delle due particelle:

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim N \left\{ e^{ikz} + e^{-ikz} + \left[ f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \phi + \pi) \right] \frac{e^{ikr}}{r} \right\}, \quad (9.1)$$

dove  $N$  è un fattore di normalizzazione. Se si impone  $N = 1$ , ognuno dei due fasci di particelle che si urtano elasticamente nel sistema del centro di massa ha flusso pari a  $\hbar k/m$ .

Il flusso di particelle raccolte nell'angolo solido  $d\Omega$  dopo l'urto risulta

$$\frac{\hbar k}{m} |f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2 d\Omega$$

e quindi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2. \quad (9.2)$$

Urto elastico di particelle identiche

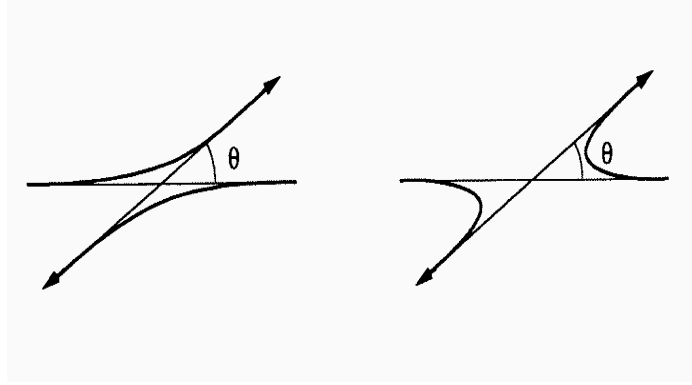


Fig. 9.1. Urto elastico di particelle identiche.

Rispetto al caso di particelle distinguibili, la sezione d'urto (9.2) presenta, oltre al termine dovuto alla diffusione nella direzione indicata dagli angoli  $\theta$  e  $\phi$ , un termine prodotto dal rinculo del bersaglio nella direzione indicata dagli angoli  $\pi - \theta$  e  $\phi + \pi$  e un termine di interferenza, di natura squisitamente quantistica, dovuto all'effetto di scambio tra particelle identiche.

Esempio 9.1

L'effetto dell'indistinguibilità può essere meglio apprezzato riconsiderando il potenziale coulombiano schermato (4.16). In approssimazione di Born con  $r_0 \rightarrow \infty$ , si ha

$$f(\theta) = \frac{mZ_1Z_2e^2}{2\hbar^2k^2 \sin^2 \theta/2}, \quad f(\pi - \theta) = \frac{mZ_1Z_2e^2}{2\hbar^2k^2 \cos^2 \theta/2}, \quad (9.3)$$

da cui

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[ \frac{mZ_1Z_2e^2}{2\hbar^2k^2} \right]^2 \left[ \frac{1}{\sin^4 \theta/2} + \frac{1}{\cos^4 \theta/2} + \frac{2}{\sin^2 \theta/2 \cos^2 \theta/2} \right]. \quad (9.4)$$

La (9.4) è essenzialmente la *formula di Mott*<sup>19</sup> per l'urto elastico di particelle cariche da bersagli carichi puntiformi. Il primo termine della (9.4) è quello che già compare

<sup>19</sup> In realtà Sir Neville Francis Mott (n. 1905) ricavò un'espressione della sezione d'urto che tiene conto dell'azione del potenziale coulombiano efficace anche a grandi distanze tra proiettile e bersaglio. Di conseguenza il fascio incidente non può più essere descritto semplicemente da un'onda piana. Inoltre, considerando elettroni, occorre tenere presente anche il loro spin. La formula di Mott contiene allora, al posto del termine interferenziale  $2 \sin^{-2} \theta/2 \cos^{-2} \theta/2$  della (9.4), il termine

$$-4 \frac{\cos(\eta \ln \tan^2 \theta/2)}{\sin^2 \theta},$$

dove

$$\eta = \frac{mZ_1Z_2e^2}{\hbar^2k},$$

e  $m$  è la massa ridotta del sistema delle due particelle identiche.

nella formula di Rutherford (4.18) ed è fortemente piccato in avanti; il secondo termine è dovuto al puro contributo di scambio ed è tipicamente piccato all'indietro ( $\theta = \pi$ ), mentre il terzo termine, che proviene dall'interferenza tra quello diretto e quello di scambio, esalta la sezione d'urto a  $\theta = \pi/2$  rispetto al caso in cui si trascura lo scambio.

La situazione è più complessa se si considera lo spin. Si supponga che proiettile e bersaglio siano fermioni identici con spin  $s = \frac{1}{2}$ . In questo caso, per la parte di spin, si possono realizzare stati di singoletto e di tripletto, in accordo con le (X.4.2) e (X.4.3). Dato che la funzione d'onda complessiva deve essere antisimmetrica, occorre combinare la parte spaziale simmetrica (antisimmetrica) con quella di spin antisimmetrica (simmetrica). Di conseguenza, la funzione d'onda nel caso degli stati di tripletto ha il seguente andamento asintotico

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim N \left\{ e^{ikz} - e^{-ikz} + \left[ f(\theta, \phi) - f(\pi - \theta, \phi + \pi) \right] \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \chi_{sm_s}, \quad (9.5)$$

mentre quella per lo stato di singoletto risulta

$$\Psi(\mathbf{r}) \sim N \left\{ e^{ikz} + e^{-ikz} + \left[ f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \phi + \pi) \right] \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \chi_a. \quad (9.6)$$

Corrispondentemente si ottiene la *sezione d'urto di tripletto*

$$\sigma_t = |f(\theta, \phi) - f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2, \quad (9.7)$$

relativa al caso in cui le due particelle hanno spin parallelo ( $S = 1$ ), e la *sezione d'urto di singoletto*

$$\sigma_s = |f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2, \quad (9.8)$$

relativa al caso in cui le due particelle hanno spin antiparallelo ( $S = 0$ ).

Si noti che le due diverse sezioni d'urto di tripletto e di singoletto sono una pura conseguenza del principio di Pauli, senza che ci sia bisogno di una dipendenza dallo spin del potenziale responsabile della diffusione. Se tale potenziale dipende dallo spin, ciò si riflette nella struttura dell'ampiezza di diffusione  $f(\theta, \phi)$ .

Spesso le particelle che si urtano elasticamente non sono polarizzate: ciò significa che non si osservano gli spin iniziali e finali e quindi si misura una sezione

---

N.F. Mott: *The collision between two electrons [L'urto di due elettroni]*, Proceedings of the Royal Society of London **A126** (1930) 259–267.

Le prime verifiche sperimentali della formula di Mott sono state ottenute da James Chadwick e Patrick Maynard Stuart Blackett (1897–1974).

J. Chadwick: *The scattering of  $\alpha$ -Particles in Helium [La diffusione di particelle  $\alpha$  in elio]*, Proceedings of the Royal Society of London **A128** (1930) 114–122.

P.M.S. Blackett e F.C. Champion: *The scattering of slow alpha particles by helium [La diffusione di particelle alfa lente da parte di elio]*, Proceedings of the Royal Society of London **A130** (1931) 380–388.



*Operatori di Møller*

d'urto mediata sulle possibili orientazioni degli spin. Ci sono quattro stati possibili, tre con spin totale 1 e uno con spin totale 0, ugualmente probabili. Perciò la sezione d'urto media risulta

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{4}\sigma_s + \frac{3}{4}\sigma_t. \quad (9.9)$$

*Esercizio 9.1*

Utilizzando i dati dell'Esempio 6.4, determinare la sezione d'urto media nell'urto neutrone–protone a bassa energia.

*Esercizio 9.2*

Dimostrare che nello spazio di spin l'ampiezza di diffusione elastica per una particella di spin  $\frac{1}{2}$  ha la seguente struttura:

$$f(\theta, \phi) = g(\theta, \phi) \mathbb{1} + ih(\theta, \phi) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (9.10)$$

dove  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k} \times \mathbf{k}' / |\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|$  è il versore normale al piano di diffusione.

*XII.10. Operatori di Møller*

In questo paragrafo viene presentato un metodo proposto da Møller<sup>20</sup> per stabilire un legame tra le soluzioni ad energie positive del problema imperturbato e le soluzioni di diffusione corrispondenti allo stesso valore di energia appartenente alla porzione continua dello spettro della hamiltoniana totale del problema d'urto. Il risultato è ottenuto in uno schema indipendente dal tempo, ma fa uso di un operatore che è costruito a partire dall'operatore di evoluzione temporale introdotto nella descrizione di interazione,

$$U(t, t_0) = e^{iH_0t/\hbar} e^{-iH(t-t_0)/\hbar} e^{-iH_0t_0/\hbar}, \quad (10.1)$$

dove  $H$  e  $H_0$  sono le hamiltoniane totale (2.1) e imperturbata, rispettivamente. Sia  $|\Phi_a\rangle$  una soluzione della (2.2) corrispondente all'autovalore  $E_a$  che appartiene alla parte continua dello spettro di  $H_0$ :  $|\Phi_a\rangle$  può essere considerato lo stato che descrive proiettile e bersaglio non interagenti, all'istante iniziale  $t_0 < 0$ . Per effetto dell'operatore di evoluzione temporale (10.1), all'istante  $t = 0$  sotto l'azione dell'intera hamiltoniana  $H$  lo stato è evoluto nel modo seguente:

---

<sup>20</sup> Christian Møller (1904–1980): *General Properties of the Characteristic Matrix in the Theory of Elementary Particles. I & II.* [Proprietà generali della matrice caratteristica nella teoria delle particelle elementari. I & II.], Matematisk-Fysiske Meddelelser det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab **23** (1945) no. 1, pp. 1–48; **26** (1946) no. 19, pp. 1–46.

$$\begin{aligned} U(0, t_0)|\Phi_a\rangle &= e^{iHt_0/\hbar} e^{-iH_0t_0/\hbar} |\Phi_a\rangle \\ &= e^{-iE_a t_0/\hbar} e^{iHt_0/\hbar} |\Phi_a\rangle. \end{aligned} \quad (10.2)$$

L'idea di Møller è che quando  $t_0 \rightarrow -\infty$  la (10.2) produce un autostato  $|\Psi\rangle$  dell'intera hamiltoniana  $H$ , con le giuste proprietà asintotiche imposte dal problema d'urto.

Per studiare un'espressione del tipo (10.2) occorre conoscere come agisce  $H$  su  $|\Phi_a\rangle$ . D'altra parte, gli autostati di  $H$  costituiscono un insieme completo, sulla base del quale è possibile sviluppare  $|\Phi_a\rangle$ . La hamiltoniana  $H$  può avere in generale sia uno spettro discreto, con autostati  $|\Psi_b\rangle$ , sia uno spettro continuo. Siano

$$|\Psi_c^{(+)}\rangle \sim |\Phi_c\rangle + \text{onda sferica uscente} \quad (10.3)$$

gli autostati del continuo, con un comportamento asintotico del tipo richiesto per descrivere la situazione di diffusione. In base all'equazione di Lippmann–Schwinger, esiste una relazione tra gli stati  $|\Psi_c^{(+)}\rangle$  e gli stati  $|\Phi_c\rangle$  che appartengono ad  $H_0$  con lo stesso autovalore di energia dello spettro continuo:

$$|\Psi_c^{(+)}\rangle = |\Phi_c\rangle + \frac{1}{E_c - H_0 + i\epsilon} V |\Psi_c^{(+)}\rangle. \quad (10.4)$$

In modo simile si può introdurre l'altro insieme di autostati di  $H$  per lo spettro continuo, corrispondente a condizioni al contorno di onda sferica entrante,

$$|\Psi_c^{(-)}\rangle = |\Phi_c\rangle + \frac{1}{E_c - H_0 - i\epsilon} V |\Psi_c^{(-)}\rangle. \quad (10.5)$$

Interviene a questo punto un'affermazione fondamentale che in generale non è dimostrata, ma che costituisce un'ipotesi ragionevole in quanto si pretende che  $H$  sia un operatore autoaggiunto: si ammette cioè che sia l'insieme di tutti gli stati  $|\Psi_b\rangle$  con tutti gli stati  $|\Psi_c^{(+)}\rangle$ , sia l'insieme di tutti gli stati  $|\Psi_b\rangle$  con tutti gli stati  $|\Psi_c^{(-)}\rangle$  costituiscano un insieme completo. Naturalmente i due insiemi non sono indipendenti tra di loro.

Tale ipotesi è fondamentale per la teoria, perché permette di disporre di una base a scelta, a seconda delle convenienti condizioni al contorno. D'ora innanzi si utilizzerà l'insieme con le condizioni al contorno (10.3), ma il risultato finale potrà facilmente essere trascritto in termini dell'insieme con le condizioni al contorno di onda entrante. Si può allora scrivere lo sviluppo

$$|\Phi_a\rangle = \int_c A_c |\Psi_c^{(+)}\rangle + \sum_b B_b |\Psi_b\rangle, \quad (10.6)$$

dove il simbolo  $\int_c$  indica la necessità di eseguire almeno un'integrazione in corrispondenza dell'indice continuo dell'energia, che è mascherato nell'indice  $c$  insieme con tutti gli altri numeri quantici che caratterizzano lo stato. Esplicitamente i coefficienti di sviluppo  $A_c$  e  $B_b$  sono dati dalle relazioni

$$A_c = \langle \Psi_c^{(+)} | \Phi_a \rangle, \quad B_b = \langle \Psi_b | \Phi_a \rangle. \quad (10.7)$$

Per la valutazione di  $A_c$  si ricorre alla (10.4):

$$\begin{aligned} A_c &= \langle \Psi_c^{(+)} | \Phi_a \rangle \\ &= \langle \Phi_c | \Phi_a \rangle + \left\langle \frac{1}{E_c - H_0 + i\epsilon} V \Psi_c^{(+)} | \Phi_a \right\rangle \\ &= \langle \Phi_c | \Phi_a \rangle + \langle \Psi_c^{(+)} | V \frac{1}{E_c - H_0 - i\epsilon} \Phi_a \rangle, \end{aligned}$$

cioè

$$A_c = \delta(c - a) + \frac{1}{E_c - E_a - i\epsilon} \langle \Psi_c^{(+)} | V | \Phi_a \rangle, \quad (10.8)$$

dove nella delta di Dirac sono contenute anche eventuali delta di Kronecker. Utilizzando lo sviluppo (10.6) e i coefficienti  $A_c$  e  $B_b$ , la (10.2) diventa

$$\begin{aligned} U(0, t_0) | \Phi_a \rangle &= \int_c A_c e^{i(E_c - E_a)t_0/\hbar} | \Psi_c^{(+)} \rangle + \sum_b B_b e^{i(E_b - E_a)t_0/\hbar} | \Psi_b \rangle \\ &= \int_c \delta(c - a) e^{i(E_c - E_a)t_0/\hbar} | \Psi_c^{(+)} \rangle \\ &\quad + \int_c \langle \Psi_c^{(+)} | V | \Phi_a \rangle \frac{e^{i(E_c - E_a)t_0/\hbar}}{E_c - E_a - i\epsilon} | \Psi_c^{(+)} \rangle \\ &\quad + \sum_b \langle \Psi_b | \Phi_a \rangle e^{i(E_b - E_a)t_0/\hbar} | \Psi_b \rangle. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Ciò che qui interessa è il comportamento della (10.9) quando  $t_0$  tende a  $-\infty$ , cioè il  $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0) | \Phi_a \rangle$ . In tali condizioni si può dimostrare che il secondo e il terzo addendo nella (10.9) si annullano.

Si consideri dapprima il secondo addendo e si ricorra al seguente *teorema*: se in un integrale rispetto a  $\omega$  c'è nell'integrando un fattore del tipo  $e^{-i\omega t_0}/(\omega + i\epsilon)$ , con  $\epsilon > 0$  piccolo a piacere ma necessario per la convergenza dell'integrale, allora questo fattore può essere sostituito sotto il segno di integrale nel modo seguente:

$$\frac{e^{-i\omega t_0}}{\omega + i\epsilon} \longrightarrow \begin{cases} -2\pi i \delta(\omega), & t_0 \rightarrow +\infty, \\ 0, & t_0 \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (10.10)$$

Il teorema (10.10) si dimostra subito tenendo presente che è

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-i\omega t_0}}{\omega + i\epsilon} &= -ie^{-i\omega t_0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} dx e^{(i\omega - \epsilon)x} \\ &= -i \int_0^{+\infty} dx e^{i\omega(x-t_0)} \\ &= -i \int_{-t_0}^{+\infty} dz e^{i\omega z}.\end{aligned}$$

Siccome

$$\begin{aligned}\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \int_{-t_0}^{+\infty} dz e^{i\omega z} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{i\omega z} = 2\pi\delta(\omega), \\ \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{-t_0}^{+\infty} dz e^{i\omega z} &= 0,\end{aligned}$$

si ottiene dunque la (10.10).

Un fattore del tipo (10.10) appare proprio nel secondo addendo della (10.9). Pertanto

$$\begin{aligned}\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0)|\Phi_a\rangle &= \\ &= |\Psi_a^{(+)}\rangle + \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \sum_b \langle \Psi_b | \Phi_a \rangle e^{i(E_b - E_a)t_0/\hbar} |\Psi_b\rangle.\end{aligned}\quad (10.11)$$

L'ultimo termine nella (10.11) non è determinato a causa del fattore oscillante nel tempo. D'altra parte va rilevato che la situazione ideale di una descrizione dello stato con un'energia ben definita, immersa nella porzione continua dello spettro, non è realizzabile se non con tempi di osservazione infinitamente lunghi. In pratica la situazione sperimentale permette una certa collimazione in energia, che corrisponde a una descrizione del sistema in termini di pacchetto di onde, piuttosto che in termini di onde monocromatiche. Quindi è più realistico utilizzare un pacchetto di onde ottenuto dalla sovrapposizione di stati del tipo (10.6):

$$|\bar{\Phi}\rangle = \int_a \langle \Phi_a | \bar{\Phi} \rangle |\Phi_a\rangle. \quad (10.12)$$

Facendo agire l'operatore di evoluzione temporale sulla (10.12), la (10.11) viene riscritta in termini di pacchetti di onde:

$$\begin{aligned}\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0)|\bar{\Phi}\rangle &= |\bar{\Psi}^{(+)}\rangle \\ &+ \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \sum_b \int_a \langle \Phi_a | \bar{\Phi} \rangle \langle \Psi_b | \Phi_a \rangle e^{i(E_b - E_a)t_0/\hbar} |\Psi_b\rangle,\end{aligned}\quad (10.13)$$

dove si è posto

$$|\overline{\Psi}^{(+)}\rangle = \int_a^f \langle \Phi_a | \overline{\Phi} \rangle |\Psi_a^{(+)}\rangle. \quad (10.14)$$

Adesso si può riconoscere che il secondo addendo nella (10.13) è nullo. Ciò è conseguenza del *teorema di Riemann-Lebesgue*, per il quale, se l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx |f(x)|$$

è convergente, allora

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \cos \lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) \sin \lambda x = 0,$$

cioè

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{\pm i\lambda x} = 0. \quad (10.15)$$

Dunque si può concludere che

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_a^f \langle \Phi_a | \overline{\Phi} \rangle \langle \Psi_b | \Phi_a \rangle e^{i(E_b - E_a)t_0/\hbar} = 0$$

se è convergente l'integrale

$$\int_a^f |\langle \Phi_a | \overline{\Phi} \rangle| \cdot |\langle \Psi_b | \Phi_a \rangle|.$$

Ma questa condizione è realizzata sempre quando si ha a che fare con pacchetti di onde  $|\overline{\Phi}\rangle$  e stati legati  $|\Psi_b\rangle$ , che hanno sempre le giuste proprietà di integrabilità.

Pertanto la (10.13) diventa

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0) |\overline{\Phi}\rangle = |\overline{\Psi}^{(+)}\rangle. \quad (10.16)$$

Questo risultato per i pacchetti di onde è esatto: esso definisce l'*operatore di Møller*,

$$U(0, -\infty) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} U(0, t_0), \quad (10.17)$$

che collega il pacchetto di onde  $|\overline{\Phi}\rangle$ , costruito con autostati di  $H_0$ , al pacchetto di onde  $|\overline{\Psi}\rangle$ , costruito con autostati di  $H$ . Si può dare una versione formale della (10.16) che riprende gli stati  $|\Phi_a\rangle$  e  $|\Psi_a^{(+)}\rangle$ , immaginando di concentrare il pacchetto sempre più strettamente attorno al valore di energia  $E_a$ . Il risultato formale è allora:

$$U(0, -\infty) |\Phi_a\rangle = |\Psi_a^{(+)}\rangle. \quad (10.18)$$

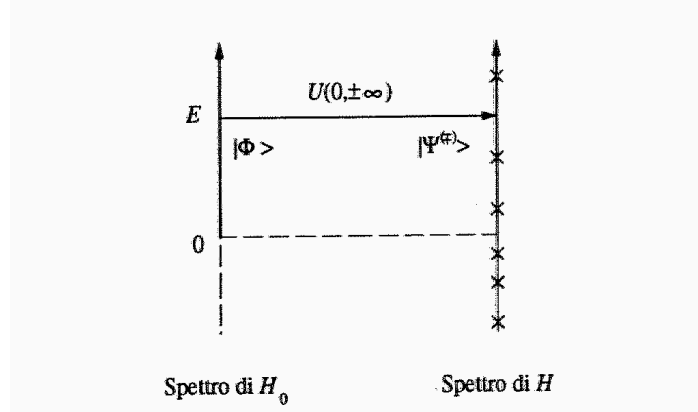


Fig. 10.1. Azione degli operatori di Møller  $U(0, \pm\infty)$  nel passaggio da un autostato  $|\Phi\rangle$  di  $H_0$  a un autostato  $|\Psi^{(\mp)}\rangle$  di  $H = H_0 + V$  appartenenti allo stesso autovalore di energia  $E > 0$ .

Se si fosse partiti nella (10.6) con uno sviluppo sugli stati  $|\Psi_c^{(-)}\rangle$ , si sarebbe arrivati in modo simile al seguente risultato finale:

$$U(0, +\infty)|\Phi_a\rangle = |\Psi_a^{(-)}\rangle, \quad (10.19)$$

dove

$$U(0, +\infty) = \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} U(0, t_0). \quad (10.20)$$

Anche questo risultato, come quello nella (10.18), è puramente formale e va inteso esattamente valido solo per i pacchetti di onde. In tal senso anche nel seguito verranno utilizzati i limiti (10.18) e (10.19).

Gli operatori  $U(0, \pm\infty)$ , agendo su una soluzione  $|\Phi_a\rangle$  del continuo per la hamiltoniana imperturbata  $H_0$ , producono le soluzioni  $|\Psi_a^{(\mp)}\rangle$  della hamiltoniana perturbata  $H$  corrispondenti alla stessa energia. Gli operatori di Møller  $U(0, \pm\infty)$  dunque forniscono le soluzioni delle equazioni di Lippmann–Schwinger (10.4) e (10.5), stabilendo una connessione tra gli autostati  $|\Phi_a\rangle$  di  $H_0$  e gli autostati  $|\Psi_a^{(\mp)}\rangle$  di  $H$  appartenenti allo stesso autovalore di energia  $E_a$  della porzione continua dello spettro (fig. 10.1).

L'operatore di evoluzione temporale (10.1) è unitario e agisce in tutto lo spazio di Hilbert. Gli operatori di Møller operano invece solo su stati che appartengono alla porzione continua dello spettro di  $H_0$ . Dalle (10.18) e (10.19) si può dedurre infatti

$$U(0, \mp\infty) = \int_a |\Psi_a^{(\pm)}\rangle \langle \Phi_a|, \quad (10.21)$$

da cui appare evidente la restrizione al sottospazio di energia positiva. Similmente si possono costruire gli operatori

$$U^\dagger(0, \mp\infty) = U(\mp\infty, 0) = \int_a |\Phi_a\rangle \langle \Psi_a^{(\pm)}|. \quad (10.22)$$

Operatori di Møller

Gli operatori di Møller  $U(0, \pm\infty)$  sono *unitari a sinistra* se operano nel sottospazio corrispondente allo spettro continuo di  $H_0$ :

$$\begin{aligned} U^\dagger(0, \mp\infty)U(0, \mp\infty) &= U(\mp\infty, 0)U(0, \mp\infty) \\ &= \int_{a,c} |\Phi_a\rangle\langle\Psi_a^{(\pm)}|\Psi_c^{(\pm)}\rangle\langle\Phi_c| \\ &= \int_{a,c} |\Phi_a\rangle\delta(a-c)\langle\Phi_c| \\ &= \int_a |\Phi_a\rangle\langle\Phi_a|, \end{aligned}$$

cioè

$$U^\dagger(0, \mp\infty)U(0, \mp\infty) = \mathbb{1}. \quad (10.23)$$

Pertanto in questo sottospazio l'inverso a sinistra di  $U(0, \mp\infty)$  è  $U^\dagger(0, \mp\infty)$ .

Invece gli operatori  $U(0, \mp\infty)$  *non* sono unitari a destra:

$$\begin{aligned} U(0, \mp\infty)U^\dagger(0, \mp\infty) &= U(0, \mp\infty)U(\mp\infty, 0) \\ &= \int_{a,c} |\Psi_a^{(\pm)}\rangle\langle\Phi_a|\Phi_c\rangle\langle\Psi_c^{(\pm)}| \\ &= \int_{a,c} |\Psi_a^{(\pm)}\rangle\delta(a-c)\langle\Psi_c^{(\pm)}| \\ &= \int_a |\Psi_a^{(\pm)}\rangle\langle\Psi_a^{(\pm)}|, \end{aligned}$$

cioè

$$U(0, \mp\infty)U^\dagger(0, \mp\infty) = \mathbb{1} - \sum_b |\Psi_b\rangle\langle\Psi_b|. \quad (10.24)$$

L'unitarietà a destra è possibile solo se  $H$  non possiede stati legati  $|\Psi_b\rangle$ . In tal caso gli operatori di Møller sono unitari e stabiliscono una corrispondenza biunivoca tra gli autostati di  $H$  e quelli di  $H_0$ , tutti appartenenti allo spettro puramente continuo. In generale però gli operatori di Møller non sono unitari, come è giusto, in quanto devono trasformare uno stato imperturbato in uno perturbato.

*Esercizio 10.1*

Verificare la seguente rappresentazione nello spazio delle posizioni per gli operatori di Møller associati a una particella:

$$\langle\mathbf{r}|U(0, \mp\infty)|\mathbf{r}'\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \Psi^{(\pm)}(\mathbf{r}).$$

*Esercizio 10.2*

Alla luce dell'esercizio precedente, verificare che nella rappresentazione delle posizioni gli operatori (non locali) di Møller sono operatori integrali.

*Esercizio 10.3*

Verificare la seguente proprietà:

$$HU(0, \mp\infty) = U(0, \mp\infty)H_0.$$

[Suggerimento: si facciano operare ambo i membri dell'equazione su uno stato arbitrario, sviluppandolo sulla base  $\{|\Phi_a\rangle\}$ .]

*Esercizio 10.4*

Dimostrare che gli stati  $|\Psi_a^{(\pm)}\rangle$  soddisfano alle stesse condizioni di ortonormalizzazione degli stati  $|\Phi_a\rangle$ .

*XII.11. La matrice di scattering*

In una descrizione dipendente dal tempo il processo d'urto collega una situazione del passato infinitamente remoto, in cui proiettile e bersaglio non interagiscono, ad una situazione, corrispondente a un istante infinitamente lontano nel futuro, in cui di nuovo manca l'interazione tra i prodotti del processo di diffusione. L'interazione tra proiettile e bersaglio risulta efficace a tempi finiti: essa è responsabile della modifica dello stato imperturbato iniziale e della sua trasformazione rivelata a processo avvenuto. In termini quantitativi, per  $t \rightarrow -\infty$ , lo stato del sistema proiettile–bersaglio è descritto da uno stato di tipo  $|\Phi\rangle$ ; sia esso  $|\Phi_i\rangle$ . L'evoluzione a tempi finiti di tale stato coinvolge l'applicazione di un operatore di Møller:  $U(t, -\infty)|\Phi_i\rangle$ . A tempi infinitamente lontani nel futuro, lo stato diventa  $U(+\infty, -\infty)|\Phi_i\rangle$ . Esso deve, d'altra parte, essere ancora uno stato di tipo  $|\Phi\rangle$ . Ci si chiede la probabilità che esso sia per esempio lo stato  $|\Phi_f\rangle$ .

Per definizione, l'ampiezza di probabilità di trovare il sistema nello stato  $|\Phi_f\rangle$  è

$$S_{fi} = \langle \Phi_f | U(+\infty, -\infty) | \Phi_i \rangle. \quad (11.1)$$

La (11.1) può anche essere riguardata come l'elemento di matrice tra gli stati  $|\Phi_i\rangle$  e  $|\Phi_f\rangle$  di un operatore  $S$  così definito:

$$S_{fi} = \langle \Phi_f | S | \Phi_i \rangle, \quad (11.2)$$

$$S = \lim_{\substack{t_0 \rightarrow -\infty \\ t \rightarrow +\infty}} U(t, t_0). \quad (11.3)$$



La (11.3), introdotta nel 1943 da Heisenberg<sup>21</sup>, è detta *matrice di scattering* o *matrice S*. Essa contiene tutta l'informazione relativa al processo. La (11.2) ne definisce gli elementi di matrice sulla base degli stati imperturbati. D'altra parte la definizione (11.1) permette di verificare che  $S_{fi}$  è strettamente legata agli stati che descrivono l'urto. Infatti, dalle (10.18) e (10.19) e dalle proprietà degli operatori di Møller, segue

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle \Phi_f | U(+\infty, -\infty) | \Phi_i \rangle \\ &= \langle \Phi_f | U(+\infty, 0) U(0, -\infty) | \Phi_i \rangle \\ &= \langle \Phi_f | U^\dagger(0, +\infty) U(0, -\infty) | \Phi_i \rangle \\ &= \langle U(0, +\infty) \Phi_f | U(0, -\infty) \Phi_i \rangle, \end{aligned} \quad (11.4)$$

cioè

$$S_{fi} \equiv \langle \Psi_f^{(-)} | \Psi_i^{(+)} \rangle. \quad (11.5)$$

Un'altra forma della matrice  $S$  è ottenibile dalla terza riga della (11.4) e dalle espressioni (10.21) e (10.22) per gli operatori di Møller:

$$S = \sum_{a,c} |\Phi_a\rangle \langle \Psi_a^{(-)} | \Psi_c^{(+)} \rangle \langle \Phi_c|. \quad (11.6)$$

In questa forma viene meglio sottolineata la relazione tra stati iniziali e finali imperturbati che vengono collegati dalla matrice  $S$  nel descrivere il processo.

La matrice  $S$  è una matrice *unitaria*. Infatti è

$$\begin{aligned} S S^\dagger &= U(+\infty, -\infty) U^\dagger(+\infty, -\infty) \\ &= U(+\infty, 0) U(0, -\infty) [U(+\infty, 0) U(0, -\infty)]^\dagger \\ &= U(+\infty, 0) U(0, -\infty) U^\dagger(0, -\infty) U^\dagger(+\infty, 0) \\ &= U(+\infty, 0) \left[ \mathbb{1} - \sum_b |\Psi_b\rangle \langle \Psi_b| \right] U^\dagger(+\infty, 0), \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto della (10.24); quindi per la (10.23) e con le espressioni (10.21) e (10.22) per gli operatori di Møller, si ha

$$\begin{aligned} S S^\dagger &= U(+\infty, 0) U(0, +\infty) - \sum_b U(+\infty, 0) |\Psi_b\rangle \langle \Psi_b| U(0, +\infty) \\ &= \mathbb{1} - \sum_b \sum_{a,c} |\Phi_a\rangle \langle \Psi_a^{(-)} | \Psi_b\rangle \langle \Psi_b | \Psi_c^{(-)} \rangle \langle \Phi_c|. \end{aligned}$$

Il secondo termine è però nullo per l'ortogonalità tra gli stati di tipo  $|\Psi_b\rangle$  e quelli di tipo  $|\Psi_{a,c}^{(-)}\rangle$ . Perciò

---

<sup>21</sup> W. Heisenberg: *Die "beobachtbaren Grössen" in der Theorie der Elementarteilchen* [Le "grandezze osservabili" nella teoria delle particelle elementari], *Zeitschrift für Physik* **120** (1943) 513–538.

$$SS^\dagger = \mathbb{1}.$$

Similmente

$$\begin{aligned} S^\dagger S &= U^\dagger(+\infty, -\infty)U(+\infty, -\infty) \\ &= [U(+\infty, 0)U(0, -\infty)]^\dagger U(+\infty, 0)U(0, -\infty) \\ &= U^\dagger(0, -\infty)U^\dagger(+\infty, 0)U(+\infty, 0)U(0, -\infty) \\ &= U^\dagger(0, -\infty)U(0, +\infty)U^\dagger(0, +\infty)U(0, -\infty) \\ &= U(-\infty, 0) \left[ \mathbb{1} - \sum_b |\Psi_b\rangle\langle\Psi_b| \right] U(0, -\infty) \\ &= U(-\infty, 0)U(0, -\infty) - \sum_b \int_{a,c}^\dagger |\Phi_a\rangle\langle\Psi_a^{(+)}|\Psi_b\rangle\langle\Psi_b|\Psi_c^{(+)}\rangle\langle\Phi_c|, \end{aligned}$$

e quindi

$$S^\dagger S = \mathbb{1}.$$

In definitiva è dunque

$$SS^\dagger = S^\dagger S = \mathbb{1}. \quad (11.7)$$

L'unitarietà della matrice  $S$  è importante per la teoria perché garantisce la conservazione della probabilità totale. Indicata infatti con

$$P_{if} = |S_{fi}|^2 \quad (11.8)$$

la probabilità di transizione dallo stato  $|\Phi_i\rangle$  iniziale allo stato  $|\Phi_f\rangle$  finale, in accordo con la (11.1), si ha

$$\begin{aligned} \sum_f P_{if} &= \sum_f |S_{fi}|^2 \\ &= \sum_f S_{fi}^* S_{fi} \\ &= \sum_f (S^\dagger)_{if} S_{fi}, \end{aligned}$$

cioè

$$\sum_f P_{if} = 1. \quad (11.9)$$

*L'operatore di transizione*

Tramite la (11.9), l'unitarietà della matrice  $S$  assicura la certezza che il sistema, inizialmente nello stato  $|i\rangle$ , autostato di  $H_0$ , alla fine dell'azione del potenziale  $V$  si ritrovi ancora nello stesso spazio di Hilbert, in uno dei possibili autostati di  $H_0$ .

*XII.12. L'operatore di transizione*

L'espressione (11.5) per la matrice  $S$  può essere rielaborata in modo da mettere in evidenza il contributo della transizione tra stati iniziale e finale. Ciò porta a definire una nuova matrice, la *matrice di transizione* o *matrice T*, e a dimostrare il teorema ottico nella sua più completa generalità. Dunque:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle \Psi_f^{(-)} | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ &= \langle \Psi_f^{(+)} | \Psi_i^{(+)} \rangle + \langle \Psi_f^{(-)} - \Psi_f^{(+)} | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ &= \delta_{fi} + \langle \Psi_f^{(-)} - \Psi_f^{(+)} | \Psi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Il primo termine della (12.1) indica che tra gli stati possibili al sistema nel lontano futuro si può sempre considerare anche uno stato  $|\Phi_f\rangle$  che coincide con lo stato iniziale  $|\Phi_i\rangle$  e che quindi rappresenta il fascio iniziale *non diffuso* in presenza di bersaglio indisturbato. Nel caso della teoria della diffusione da potenziale del paragrafo XII.1 ciò corrisponde all'onda piana incidente  $e^{ikz}$ . L'informazione fisica sul processo di diffusione è perciò contenuta nel secondo termine della (12.1), che si può valutare ricorrendo all'equazione di Lippmann–Schwinger nella forma (3.7):

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f^{(-)} - \Psi_f^{(+)} | \Psi_i^{(+)} \rangle &= \langle \Phi_f | \left[ \frac{1}{E_f - H - i\epsilon} V - \frac{1}{E_f - H + i\epsilon} V \right]^\dagger | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ &= \langle \Phi_f | V \left[ \frac{1}{E_f - H + i\epsilon} - \frac{1}{E_f - H - i\epsilon} \right] | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ &= \langle \Phi_f | V \left[ \frac{1}{E_f - E_i + i\epsilon} - \frac{1}{E_f - E_i - i\epsilon} \right] | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ &= \langle \Phi_f | V \frac{-2i\epsilon}{(E_f - E_i)^2 + \epsilon^2} | \Psi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Nella (12.2) occorre prendere il limite per  $\epsilon \rightarrow 0$ , per cui è utile la relazione

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\omega^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(\omega), \quad (12.3)$$

che deriva dalla (A.54). Pertanto la (12.2) diventa

$$\langle \Psi_f^{(-)} - \Psi_f^{(+)} | \Psi_i^{(+)} \rangle = -2\pi i \delta(E_i - E_f) \langle \Phi_f | V | \Psi_i^{(+)} \rangle. \quad (12.4)$$

Conviene introdurre la matrice  $T$  definita mediante i suoi elementi:

$$T_{fi} = \langle \Phi_f | V | \Psi_i^{(+)} \rangle. \quad (12.5)$$

In tal modo la matrice  $S$  della (12.1) può essere riespressa in termini di matrice  $T$ :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_i - E_f) T_{fi}. \quad (12.6)$$

La presenza della delta sull'energia indica che nella transizione da  $|\Phi_i\rangle$  a  $|\Phi_f\rangle$  indotta dal processo d'urto l'energia totale si conserva, anche se altri numeri quantici possono cambiare.

Se per arrivare alla (12.6), invece di operare sul bra della (12.1), si fosse sostituito allo stato  $|\Psi_i^{(+)}\rangle$  lo stato  $|\Psi_i^{(-)}\rangle + |\Psi_i^{(+)} - \Psi_i^{(-)}\rangle$ , si sarebbe giunti alla definizione

$$T_{fi} = \langle \Psi_f^{(-)} | V | \Phi_i \rangle, \quad (12.7)$$

equivalente alla (12.5).

Come per la matrice  $S$ , anche per la matrice  $T$  si possono riesprimere gli elementi (12.5) o (12.7) in termini di un *operatore di transizione*  $T$  che collega stati imperturbati  $|\Phi_i\rangle$  e  $|\Phi_f\rangle$ :

$$T_{fi} = \langle \Phi_f | T | \Phi_i \rangle. \quad (12.8)$$

Le tre forme (12.5), (12.7) e (12.8) sono forme equivalenti che definiscono gli elementi della matrice che rappresenta l'operatore di transizione  $T$ . In particolare la (12.8) mette in evidenza il significato fisico di *ampiezza di transizione* che si può attribuire all'elemento di matrice  $T_{fi}$ . Ma si può anche altrettanto bene ricavare un'equazione che permette di definire  $T$  in termini operatoriali e non solo mediante i suoi elementi di matrice. Infatti, si parta ad esempio dalla (12.5) e si usi l'equazione di Lippmann-Schwinger nella forma (3.1):

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \langle \Phi_f | V | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ &= \langle \Phi_f | V | \Phi_i \rangle + \langle \Phi_f | V \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} V | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ &= \langle \Phi_f | V | \Phi_i \rangle + \sum_a \langle \Phi_f | V | \Phi_a \rangle \frac{1}{E_i - E_a + i\epsilon} \langle \Phi_a | V | \Psi_i^{(+)} \rangle, \end{aligned}$$

che può risciversi

$$T_{fi} = V_{fi} + \sum_a V_{fa} \frac{1}{E_i - E_a + i\epsilon} T_{ai}. \quad (12.9)$$

Ma questa è un'equazione tra elementi di matrice, che equivale all'equazione operatoriale:

$$T = V + V \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} T. \quad (12.10)$$

*L'operatore di transizione*

Introducendo la funzione di Green  $G_0$  per il caso imperturbato, la (12.10) può anche porsi nella forma

$$T = V + VG_0T. \quad (12.11)$$

Se si parte invece dalla (12.7), si ottiene equivalentemente

$$T = V + TG_0V. \quad (12.12)$$

Si arriva a una terza espressione per l'operatore di transizione  $T$  utilizzando l'equazione di Lippmann-Schwinger nella forma (3.7) e partendo ad esempio dalla (12.5):

$$\begin{aligned} T_{fi} &= \langle \Phi_f | V | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ &= \langle \Phi_f | V | \Phi_i \rangle + \langle \Phi_f | V \frac{1}{E_i - H + i\epsilon} V | \Phi_f \rangle, \end{aligned}$$

e quindi

$$T = V + VGV, \quad (12.13)$$

dove  $G$  è la funzione di Green del problema completo di  $H = H_0 + V$ .

Le tre equazioni (12.11), (12.12) e (12.13) definiscono l'operatore di transizione  $T$  a partire dal potenziale  $V$  che stabilisce l'interazione tra proiettile e bersaglio. La (12.11) e la (12.12) coinvolgono la funzione di Green  $G_0$  per il caso imperturbato, che spesso può essere nota, ma sono equazioni implicite per  $T$ . La (12.13) fornisce direttamente  $T$ , ma richiede la conoscenza della funzione di Green  $G$  del sistema interagente proiettile–bersaglio e quindi implica già la soluzione del problema completo. Sono perciò necessari metodi di approssimazione per determinare  $T$ , basati in generale su sviluppi perturbativi. Se il potenziale  $V$  è da ritenersi “piccolo”, al primo ordine di uno sviluppo perturbativo in  $V$  tutte e tre le equazioni (12.11), (12.12) e (12.13) producono l'approssimazione

$$T \simeq V, \quad (12.14)$$

che equivale all'approssimazione di Born del paragrafo XII.4.

*Esercizio 12.1*

Per un urto puramente elastico, verificare che con l'approssimazione (12.14) l'elemento di matrice (12.8) coincide con quello che interviene nella sezione d'urto (4.11) in approssimazione di Born.

XII.13. Sezione d'urto e teorema ottico

Una volta nota la probabilità di transizione dallo stato iniziale allo stato finale (11.8), per il calcolo della sezione d'urto del processo occorre costruire la probabilità di transizione per unità di tempo:

$$w_{if} = \frac{d}{dt} P_{if}. \quad (13.1)$$

Nella valutazione di  $w_{if}$  conviene far intervenire l'operatore  $T$  secondo la (12.6):

$$\begin{aligned} w_{if} &= \frac{d}{dt} \left[ \left( \delta_{if} - 2\pi i \delta(E_i - E_f) T_{fi} \right)^* \left( \delta_{if} - 2\pi i \delta(E_i - E_f) T_{fi} \right) \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ i \delta_{if} (T_{fi}^* - T_{fi}) + 2\pi \delta(E_i - E_f) |T_{fi}|^2 \right] 2\pi \delta(E_i - E_f). \end{aligned} \quad (13.2)$$

Il fattore

$$2\pi \delta(E_i - E_f) = \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i(E_i - E_f)t/\hbar} \quad (13.3)$$

che compare nella seconda riga della (13.2) va valutato per  $E_i = E_f$ , a causa della  $\delta_{if}$  e dell'altra delta sull'energia che moltiplicano i termini entro parentesi quadrata. Allora la derivata rispetto al tempo della (13.3) introduce solo un fattore  $\hbar^{-1}$ . Perciò si ha

$$w_{if} = \frac{2}{\hbar} \delta_{if} \text{Im } T_{ii} + \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_i - E_f) |T_{fi}|^2. \quad (13.4)$$

Il primo termine coinvolge la parte immaginaria di  $T_{ii}$ , che è l'elemento dell'operatore  $T$  tra gli stessi stati  $|\Phi_i\rangle$  iniziale e finale:  $T_{ii}$  pertanto non può che descrivere un urto elastico in avanti ( $\theta = 0$ ). Per  $i \neq f$  sopravvive solo il secondo termine e  $w_{if}$  acquista un'espressione che ricorda la regola d'oro (XI.4.18). Infatti per  $i \neq f$  la (13.4) può essere riscritta sostituendo la delta con la densità degli stati finali:

$$w_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{fi}|^2 \rho(E) \quad (i \neq f). \quad (13.5)$$

Però la (13.5) è più generale della (XI.4.18), in quanto espressa in termini dell'operatore  $T$  e non semplicemente mediante gli elementi di matrice del potenziale di interazione  $V$ . D'altra parte la (XI.4.18) è stata ottenuta nella teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo limitandosi a considerare il primo ordine dello sviluppo. Anche qui, se si adotta l'approssimazione (12.14), la (13.5) ricade esattamente nella regola d'oro e nell'approssimazione di Born.

Nota la probabilità di transizione per unità di tempo,  $w_{if}$ , la sezione d'urto per la transizione dallo stato  $|\Phi_i\rangle$  allo stato  $|\Phi_f\rangle$ ,  $i \neq f$ , si ottiene dividendo  $w_{if}$  per il flusso incidente  $\hbar k_i/m$ ,  $m$  essendo la massa ridotta del sistema bersaglio-proiettile:

$$\sigma_{if} = \frac{w_{if}}{\hbar k_i/m} = \frac{2\pi m}{\hbar^2 k_i} |T_{fi}|^2 \rho(E). \quad (13.6)$$

*Esercizio 13.1*

Verificare che la (13.6) coincide con la (4.11) se si adotta l'approssimazione di Born (12.14).

Il teorema ottico può essere ora dimostrato in tutta la sua generalità. La conservazione della probabilità (11.9), collegata all'unitarietà della matrice  $S$ , è anche responsabile del teorema ottico. Infatti, se si somma la (13.1) su tutti i possibili stati finali  $f$  e si tiene presente la (11.9), deve essere

$$\sum_f w_{if} = \frac{d}{dt} \sum_f P_{if} = 0. \quad (13.7)$$

Perciò dalla (13.4) segue

$$\frac{2}{\hbar} \text{Im} T_{ii} + \frac{2\pi}{\hbar} \sum_f |T_{fi}|^2 \delta(E_i - E_f) = 0. \quad (13.8)$$

D'altra parte, per la (13.6) è

$$\sum_f \sigma_{if} = \frac{2\pi m}{\hbar^2 k_i} \sum_f |T_{fi}|^2 \rho(E). \quad (13.9)$$

Pertanto, dal confronto tra (13.8) e (13.9) e con la solita sostituzione della delta d'energia con la densità degli stati, si ricava

$$\begin{aligned} \sum_f \sigma_{if} &= \sigma_{tot} \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2 k_i} \text{Im} T_{ii}. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Se si riesprime l'ampiezza di diffusione elastica (2.29) coinvolgendo l'operatore  $T$ , cioè

$$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} T_{fi}, \quad (13.11)$$

si verifica immediatamente che la forma (8.2) del teorema ottico per l'urto elastico è un caso particolare del teorema ottico (13.10). Indicando allora in generale con

$$A_{fi} \equiv -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} T_{fi}, \quad (13.12)$$

l'ampiezza di reazione per un generico processo descritto dall'operatore di transizione  $T$ , il teorema ottico ha la seguente espressione generale:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k_i} \text{Im } A_{ii}, \quad (13.13)$$

dove  $A_{ii}$  rappresenta l'ampiezza di diffusione elastica in avanti.

#### XII.14. L'urto anelastico

Come applicazione delle precedenti considerazioni viene qui discusso un caso particolare in cui una particella puntiforme incide su un bersaglio con possibili gradi di libertà interni. In tal caso la hamiltoniana imperturbata  $H_0$  è somma di due contributi:

$$H_0 = H_r + H_i. \quad (14.1)$$

La hamiltoniana  $H_r$  corrisponde all'energia cinetica del moto relativo proiettile-bersaglio:

$$H_r|\mathbf{k}\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} |\mathbf{k}\rangle. \quad (14.2)$$

La hamiltoniana  $H_i$  descrive il moto interno del bersaglio e dipende dalle coordinate interne, collettivamente indicate con  $\xi$ :

$$H_i|\phi_\alpha\rangle = E_\alpha|\phi_\alpha\rangle. \quad (14.3)$$

Nello spazio delle posizioni gli autostati di  $H_r$  e  $H_i$  sono

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (14.4)$$

$$\langle \xi | \phi_\alpha \rangle = \phi_\alpha(\xi). \quad (14.5)$$

Gli stati imperturbati, autostati di  $H_0$ ,

$$H_0|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle, \quad (14.6)$$

sono costruiti mediante il prodotto diretto di autostati di  $H_r$  e  $H_i$ :

$$|\Phi\rangle = |\phi_\alpha; \mathbf{k}\rangle, \quad (14.7)$$

$$E \equiv E_{k\alpha} = E_\alpha + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (14.8)$$



A seconda delle condizioni al contorno riflesse nel segno di  $i\epsilon$ , nello spazio delle posizioni si può costruire la corrispondente funzione di Green,

$$G_0^{(\pm)}(\mathbf{r}\xi; \mathbf{r}'\xi') = \langle \mathbf{r}\xi | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \mathbf{r}'\xi' \rangle, \quad (14.9)$$

che è fondamentale per cercare la soluzione del problema dell'urto. Inserendo nella (14.9) opportune completezze per spettralizzare l'identità, si ricava

$$\begin{aligned} G_0^{(\pm)}(\mathbf{r}\xi; \mathbf{r}'\xi') &= \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \langle \mathbf{r}\xi | \phi_\alpha; \mathbf{k} \rangle \langle \phi_\alpha; \mathbf{k} | \frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon} | \phi_\beta; \mathbf{k}' \rangle \langle \phi_\beta; \mathbf{k}' | \mathbf{r}'\xi' \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha\beta} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{k}' \phi_\alpha(\xi) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{E - E_{k\alpha} \pm i\epsilon} \phi_\beta^*(\xi') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'}, \end{aligned}$$

cioè

$$G_0^{(\pm)}(\mathbf{r}\xi; \mathbf{r}'\xi') = \sum_{\alpha} \phi_\alpha(\xi) \phi_\alpha^*(\xi') \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{E - E_{k\alpha} \pm i\epsilon}. \quad (14.10)$$

Si può confrontare questo risultato con la (2.15) che si riferisce a un bersaglio puntiforme. Se è lecito considerare  $E_{k\alpha}$  indipendente dall'indice  $\alpha$ , come nel caso di bersaglio puntiforme, la somma su  $\alpha$  è la relazione di completezza per gli stati  $\phi_\alpha(\xi)$ :

$$\sum_{\alpha} \phi_\alpha(\xi) \phi_\alpha^*(\xi') = \delta(\xi - \xi'). \quad (14.11)$$

Allora le variabili  $\xi$  diventano ridondanti e la (14.10) ricade nella (2.15).

In analogia con quanto fatto al paragrafo XII.2, si può eseguire l'integrale su  $\mathbf{k}$  nella (14.10) e ottenere

$$G_0^{(\pm)}(\mathbf{r}\xi; \mathbf{r}'\xi') = -\frac{2m}{\hbar^2} \sum_{\alpha} \phi_\alpha(\xi) \phi_\alpha^*(\xi') \frac{e^{\pm iK_\alpha |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (14.12)$$

dove  $K_\alpha$  è definito dalla relazione

$$E - E_{k\alpha} \equiv \frac{\hbar^2}{2m} (K_\alpha^2 - k^2), \quad K_\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - E_\alpha) > 0. \quad (14.13)$$

Come nel paragrafo XII.2, a grandi  $r$  si ottiene l'andamento asintotico

$$\frac{e^{\pm iK_\alpha|r-r'|}}{|r-r'|} \sim \frac{e^{\pm iK_\alpha r}}{r} e^{\mp ik_f \cdot r'}, \quad (14.14)$$

dove

$$\mathbf{k}_f \equiv K_\alpha \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (14.15)$$

Quando si accende l'interazione  $V$  tra proiettile e bersaglio, gli autostati della hamiltoniana totale  $H = H_0 + V$  si devono ottenere da un'equazione di Lippmann-Schwinger del tipo (3.1). Nello spazio delle posizioni interessa dunque la seguente funzione:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}\xi | \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} V | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ = \int d\mathbf{r}' \int d\xi' G_0^{(+)}(\mathbf{r}\xi; \mathbf{r}'\xi') \langle \mathbf{r}'\xi' | V | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ = \sum_\alpha \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{r}' \int d\xi' G_0^{(+)}(\mathbf{r}\xi; \mathbf{r}'\xi') \langle \mathbf{r}'\xi' | \phi_\alpha; \mathbf{k} \rangle \langle \phi_\alpha; \mathbf{k} | V | \Psi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned}$$

Sostituendo le (14.12), (14.4) e (14.5), si ha

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}\xi | \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} V | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \sum_\alpha \phi_\alpha(\xi) \int d\mathbf{r}' \frac{e^{iK_\alpha|r-r'|}}{|r-r'|} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} e^{ik \cdot r'} \langle \phi_\alpha; \mathbf{k} | V | \Psi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Per il calcolo dell'ampiezza di diffusione occorre l'andamento della (14.16) per grandi  $r$ . Utilizzando allora le (14.14) e (14.15), la (14.16) diventa

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}\xi | \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} V | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ \sim -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \sum_\alpha \phi_\alpha(\xi) \frac{e^{iK_\alpha r}}{r} \\ \times \int d\mathbf{r}' e^{-ik_f \cdot r'} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\mathbf{k} e^{ik \cdot r'} \langle \phi_\alpha; \mathbf{k} | V | \Psi_i^{(+)} \rangle \\ = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \sum_\alpha \phi_\alpha(\xi) \frac{e^{iK_\alpha r}}{r} (2\pi)^{3/2} \langle \phi_\alpha; \mathbf{k}_f | V | \Psi_i^{(+)} \rangle. \end{aligned} \quad (14.17)$$

La (14.17) può porsi nella forma

*L'effetto fotoelettrico*

$$\langle r\xi | \frac{1}{E_i - H_0 + i\epsilon} V | \Psi_i^{(+)} \rangle \sim \sum_{\alpha} A_{fi}^{(\alpha)} \frac{e^{iK_{\alpha}r}}{r} \phi_{\alpha}(\xi), \quad (14.18)$$

dove si è definita l'ampiezza di diffusione

$$A_{fi}^{(\alpha)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} (2\pi)^{3/2} \langle \phi_{\alpha}; \mathbf{k}_f | V | \Psi_i^{(+)} \rangle. \quad (14.19)$$

Risulta

$$A_{fi}^{(\alpha)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} T_{fi}, \quad (14.20)$$

in accordo con la (13.12).

Una volta nota l'ampiezza di diffusione, la sezione d'urto si ottiene dividendo il flusso uscente nell'angolo solido  $d\Omega$ ,

$$\frac{\hbar k_f}{m} |A_{fi}^{(\alpha)}|^2 d\Omega,$$

per il flusso incidente  $\hbar k_i/m$ . Perciò

$$d\sigma_{if} = \frac{k_f}{k_i} |A_{fi}^{(\alpha)}|^2 d\Omega,$$

e quindi

$$\frac{d\sigma_{if}}{d\Omega} = \frac{m^2}{(2\pi\hbar^2)^2} \frac{k_f}{k_i} |T_{fi}|^2. \quad (14.21)$$

La (14.21) è in accordo con la (13.6) e rispetta il teorema ottico, come si può verificare, tenendo presente che nell'angolo solido  $d\Omega$  la densità degli stati finali è  $d\rho = m\hbar k_f / (2\pi\hbar)^3 d\Omega$  come nella (4.13).

*XII.15. L'effetto fotoelettrico*

Il formalismo fin qui sviluppato per i processi d'urto è applicabile a qualunque tipo di proiettile, indipendentemente dal fatto che in senso classico possa considerarsi una particella oppure un'onda. In particolare, i processi originati dall'interazione tra radiazione elettromagnetica e materia, già trattati nell'ambito della teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo nel capitolo XI, possono essere studiati valutandone la sezione d'urto secondo le linee esposte in questo capitolo. Come esempio si può considerare l'effetto fotoelettrico, cioè quel processo in cui l'urto del fotone proiettile avviene con un elettrone in uno stato legato atomico e risulta nell'assorbimento del fotone stesso: la sua energia viene totalmente ceduta all'elettrone che può essere espulso dall'atomo lasciandolo ionizzato.

Il calcolo della sezione d'urto per l'emissione dell'elettrone, in accordo con le considerazioni svolte nel paragrafo XII.13, richiede il rapporto tra la probabilità di transizione per unità di tempo e il flusso incidente. La probabilità di assorbimento di un fotone per unità di tempo è stata valutata nella (XI.6.17); qui viene ritrascritta ricorrendo alla densità degli stati finali per l'elettrone, di impulso  $p_f = \hbar k_f$ , che si immagina di rivelare nell'angolo solido  $d\Omega$ :

$$dw_a = \frac{4\pi^2 e^2}{m^2 \omega} n(\omega) |\langle f | e^{ik \cdot r} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{p} | i \rangle|^2 \frac{m \hbar k_f}{(2\pi \hbar)^3} d\Omega. \quad (15.1)$$

Il flusso incidente è  $n(\omega)c$ , per cui la sezione d'urto risulta

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{n(\omega)c} \frac{dw_a}{d\Omega} \\ &= \frac{e^2 k_f}{2\pi m \omega c} |\langle f | e^{ik \cdot r} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\nabla} | i \rangle|^2. \end{aligned} \quad (15.2)$$

Lo stato finale  $|f\rangle$  appartiene allo spettro continuo della hamiltoniana atomica. Si può supporre che l'energia del fotone  $\hbar\omega$  sia sufficientemente maggiore dell'energia di ionizzazione  $\epsilon_i$  dell'atomo, che per un atomo idrogenoide è  $\epsilon_i = Z^2 m e^4 / 2 \hbar^2$ , eq. (V.8.17), in modo che l'energia cinetica dell'elettrone emesso sia molto maggiore di  $\epsilon_i$ :

$$\frac{\hbar^2 k_f^2}{2m} = \hbar\omega - \frac{Z^2 m e^4}{2 \hbar^2} \gg \frac{Z^2 m e^4}{2 \hbar^2}, \quad (15.3)$$

cioè

$$k_f \frac{a}{Z} \gg 1, \quad (15.4)$$

dove  $a = \hbar^2 / m e^2$  è il raggio di Bohr. Tuttavia l'energia del fotone non deve neppure essere troppo grande da divenire confrontabile con la massa a riposo dell'elettrone e introdurre effetti relativistici che qui sono ignorati. In queste condizioni nella rappresentazione delle posizioni si può approssimare allora lo stato finale dell'elettrone con un'onda piana,

$$\langle \mathbf{r} | f \rangle = e^{ik_f \cdot \mathbf{r}}. \quad (15.5)$$

Per lo stato iniziale  $|i\rangle$  si assume qui lo stato corrispondente al livello più basso di un atomo idrogenoide, la cosiddetta *shell K*,

$$\langle \mathbf{r} | i \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{3/2} e^{-Zr/a}. \quad (15.6)$$

Allora l'elemento di matrice che compare nella (15.2) si può valutare integrando dapprima per parti:

$$\begin{aligned}\langle f | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla | i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{3/2} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_f)\cdot\mathbf{r}} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \nabla e^{-Zr/a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{Z}{a} \right)^{3/2} i \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k}_f \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_f)\cdot\mathbf{r}} e^{-Zr/a},\end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che l'onda elettromagnetica è trasversale,  $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$ . L'integrale si può ora eseguire con metodi elementari:

$$\int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_f)\cdot\mathbf{r}} e^{-Zr/a} = \frac{8\pi(Z/a)}{[(Z/a)^2 + q^2]^2},$$

dove

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_f \quad (15.7)$$

è il momento trasferito dal fotone all'elettrone. Con questi risultati la sezione d'urto diventa

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{32e^2 k_f}{m\omega c} (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k}_f)^2 \left( \frac{Z}{a} \right)^5 \frac{1}{[(Z/a)^2 + q^2]^4}. \quad (15.8)$$

Se si indica con  $\theta$  l'angolo di emissione dell'elettrone rispetto alla direzione del fotone incidente, cioè l'angolo tra  $\mathbf{k}_f$  e  $\mathbf{k}$  nel piano di reazione, e con  $\phi$  l'angolo tra il piano di polarizzazione individuato da  $\mathbf{k}$  e  $\boldsymbol{\epsilon}$  e il piano di reazione individuato da  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}_f$ , si ha

$$q^2 = k^2 + k_f^2 - 2kk_f \cos \theta, \quad (15.9)$$

$$(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k}_f)^2 = k_f^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi. \quad (15.10)$$

Inoltre nelle condizioni della (15.3) si può assumere  $\hbar\omega \simeq \hbar^2 k_f^2 / 2m$ , per cui

$$k = \frac{\omega}{c} \simeq \frac{\hbar k_f^2}{2mc} = \frac{1}{2} \beta k_f, \quad (15.11)$$

dove  $\beta = \hbar k_f / mc = v_f / c \ll 1$ . Perciò, per la (15.4) e all'ordine  $\beta$ ,

$$(Z/a)^2 + q^2 \simeq k_f^2 (1 - \beta \cos \theta).$$

Quindi, mediando sulla polarizzazione del fotone incidente, cioè sull'angolo  $\phi$   $[(1/2\pi) \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi = \frac{1}{2}]$ , la sezione d'urto risulta infine

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 16\alpha \frac{\hbar}{m\omega} \frac{1}{k_f^5} \left( \frac{Z}{a} \right)^5 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^4}, \quad (15.12)$$

dove si è messa in evidenza la costante di struttura fine  $\alpha = e^2/\hbar c$ .

La sezione d'urto risulta massima per l'emissione di fotoelettroni in direzione perpendicolare a quella di incidenza dei fotoni ( $\theta = \frac{1}{2}\pi, \phi = 0$ ), parallelamente alla direzione del vettore elettrico del campo elettromagnetico. Il termine dipendente da  $\theta$  nel denominatore provoca un piccolo spostamento del picco di emissione nella direzione in avanti rispetto al fascio di fotoni, che aumenta col crescere della velocità degli elettroni. Si presenta inoltre una crescita della sezione d'urto secondo  $Z^5$  e una rapida diminuzione come  $\omega k_f^5 \sim \omega^{3.5}$  al crescere dell'energia dei fotoni. Queste caratteristiche permangono anche in una trattazione più raffinata in cui lo stato finale sia calcolato esattamente e si tenga conto di effetti relativistici.

### XII.16. Proprietà di simmetria e matrice di transizione

Le proprietà di simmetria della hamiltoniana  $H_0$  e del potenziale  $V$  hanno importanti conseguenze sulla struttura della matrice di transizione e danno origine a semplificazioni di calcolo per la sezione d'urto. Se alla simmetria di  $H_0$  e  $V$  è associato un operatore unitario  $U$ , per cui

$$UH_0U^\dagger = H_0, \quad UVU^\dagger = V, \quad (16.1)$$

dalla (12.11) o dalla (12.13) segue immediatamente che anche l'operatore di transizione  $T$  gode della stessa simmetria:

$$UTU^\dagger = T. \quad (16.2)$$

Perciò se si indicano con

$$|\Phi'_i\rangle = U|\Phi_i\rangle, \quad |\Phi'_f\rangle = U|\Phi_f\rangle \quad (16.3)$$

gli stati trasformati secondo  $U$  degli stati iniziali e finali di un problema d'urto, per gli elementi della matrice di transizione si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \Phi'_f | T | \Phi'_i \rangle &= \langle \Phi_f | U^\dagger T U | \Phi_i \rangle \\ &= \langle \Phi_f | U^\dagger U T U^\dagger U | \Phi_i \rangle, \end{aligned}$$

cioè

$$\langle \Phi'_f | T | \Phi'_i \rangle = \langle \Phi_f | T | \Phi_i \rangle. \quad (16.4)$$

Per esempio, nel caso dell'urto elastico, gli stati iniziale  $|\mathbf{k}\rangle$  e finale  $|\mathbf{k}'\rangle$  possono essere etichettati col valore dei vettori d'onda incidente  $\mathbf{k}$  e uscente  $\mathbf{k}'$ , rispettivamente. Se la simmetria è la parità e  $U$  è l'operatore di parità  $P$ , gli stati trasformati corrispondenti sono  $|\mathbf{-k}\rangle$  e  $|\mathbf{-k}'\rangle$ . Allora la simmetria impone

$$\langle -\mathbf{k}'|T|-\mathbf{k}\rangle = \langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k}\rangle. \quad (16.5)$$

Ciò significa che l'ampiezza di transizione ha lo stesso valore per il processo diretto  $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$  e per quello in cui tutti gli impulsi sono invertiti.

Nel metodo dello sviluppo in onde parziali, utilizzato al paragrafo XII.5 per la costruzione dell'ampiezza di diffusione elastica in presenza di potenziale  $V$  invariante per rotazioni, la simmetria sferica del problema si riflette nell'indipendenza dal numero quantico  $m$  dei singoli contributi relativi alle varie onde parziali  $l$  nell'ampiezza di diffusione (5.14). I coefficienti  $S_l$  non sono altro che gli elementi (diagonali) della matrice  $S$  sulla base sferica che tiene conto della simmetria del problema.

Simmetrie della hamiltoniana associate a operatori unitari implicano la possibilità di costruire un insieme completo di autostati simultanei della hamiltoniana e dei generatori delle operazioni di simmetria. Su questa base di autostati allora la matrice  $T$  e anche la matrice  $S$  risultano diagonali. Nel caso della simmetria di rotazione, per cui il momento angolare commuta con la hamiltoniana, come autostati simultanei di  $H$  e del momento angolare si possono allora scegliere gli stati  $\{|n\ l\ m\rangle\}$  su cui rendere diagonali anche  $T$  e  $S$ . Questo è appunto quanto è stato fatto con lo sviluppo in onde parziali nel paragrafo XII.5.

Importanti conseguenze sulla matrice di transizione sono anche prodotte quando  $H_0$  e  $V$  sono invarianti per inversione temporale. Dato che l'operatore di inversione temporale  $\mathcal{T}$  è antiunitario (cfr. eq. (VI.7.10)), nella (12.11) o nella (12.13) l'inversione temporale provoca un cambiamento di segno nel termine  $i\epsilon$  che compare nella funzione di Green, per cui

$$\mathcal{T}T\mathcal{T}^{-1} = T^\dagger. \quad (16.6)$$

Questa proprietà permette di collegare gli elementi della matrice di transizione per un processo diretto,

$$T_{ba} = \langle \Phi_b|T|\Phi_a\rangle, \quad (16.7)$$

con gli elementi della matrice di transizione per il processo inverso,

$$T_{\bar{a}\bar{b}} = \langle \bar{\Phi}_a|T|\bar{\Phi}_b\rangle, \quad (16.8)$$

dove

$$|\bar{\Phi}_a\rangle = \mathcal{T}|\Phi_a\rangle, \quad |\bar{\Phi}_b\rangle = \mathcal{T}|\Phi_b\rangle \quad (16.9)$$

sono gli stati ottenuti per inversione temporale dagli stati  $|\Phi_a\rangle$  e  $|\Phi_b\rangle$ . Infatti, scegliendo

$$|\psi_a\rangle = T|\Phi_a\rangle, \quad |\psi_b\rangle = |\Phi_b\rangle$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\bar{\psi}_a\rangle &= \mathcal{T}T|\Phi_a\rangle = \mathcal{T}T\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}|\Phi_a\rangle = T^\dagger|\bar{\Phi}_a\rangle, \\ |\bar{\psi}_b\rangle &= |\bar{\Phi}_b\rangle, \end{aligned}$$

si ottiene, grazie alla (VI.7.11),

$$T_{\bar{a}\bar{b}} = T_{ba}. \quad (16.10)$$

Analoga relazione sussiste tra gli elementi della matrice  $S$ :

$$S_{\bar{a}\bar{b}} = S_{ba}. \quad (16.11)$$

La probabilità per unità di tempo di un processo che porta dallo stato  $|\Phi_a\rangle$  allo stato  $|\Phi_b\rangle$  è proporzionale al modulo quadrato della matrice di transizione  $T_{ba}$ , moltiplicato per la densità degli stati finali  $\rho(E_b)$ . Allora la (16.10) implica la relazione

$$\frac{|T_{ba}|}{\rho(E_b)} = \frac{|T_{\bar{a}\bar{b}}|}{\rho(E_a)}, \quad (16.12)$$

nota come *teorema di reciprocità*, che collega la probabilità per la transizione diretta con quella della transizione inversa temporalmente. Le due probabilità coincidono se le densità degli stati finali per i due processi sono le stesse.

Se la hamiltoniana è anche invariante per inversione spaziale, l'operazione congiunta di inversione spaziale e di inversione temporale lascia inalterati gli impulsi, ma cambia di segno le coordinate e i momenti angolari. In sistemi privi di spin allora il modulo degli elementi di matrice della transizione  $a \rightarrow b$  e della transizione inversa  $b \rightarrow a$  sono gli stessi, per cui vale l'uguaglianza

$$\frac{|T_{ba}|}{\rho(E_b)} = \frac{|T_{ab}|}{\rho(E_a)}, \quad (16.13)$$

nota come *bilancio dettagliato*.

*Esercizio 16.1*

Verificare la validità del bilancio dettagliato per l'urto elastico provocato da un potenziale invariante per operazione di parità.

*Esercizio 16.2*

Verificare che nell'approssimazione di Born vale il bilancio dettagliato.