

## E' POSSIBILE OSSERVARE LA CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE ?

In un lavoro del 1959 J. Terrell mostra l'impossibilità di osservare la contrazione di Lorentz. In particolare egli mostra, che un dato oggetto, in moto con velocità  $v$  molto grande rispetto ad un riferimento in quiete  $S$ , risulta, rispetto ad  $S$ , non contratto ma ruotato.

Supponiamo di considerare un cubo di lato  $d'$  in moto con velocità  $v$  rispetto al nostro riferimento  $S$  considerato in quiete (il moto avvenga in modo che gli spigoli del cubo si mantengano paralleli a quelli del riferimento). Per semplicità consideriamo le cose in due dimensioni, come mostrato nella figura 74 (anziché un cubo, consideriamo un quadrato). Supponiamo che il fenomeno sia

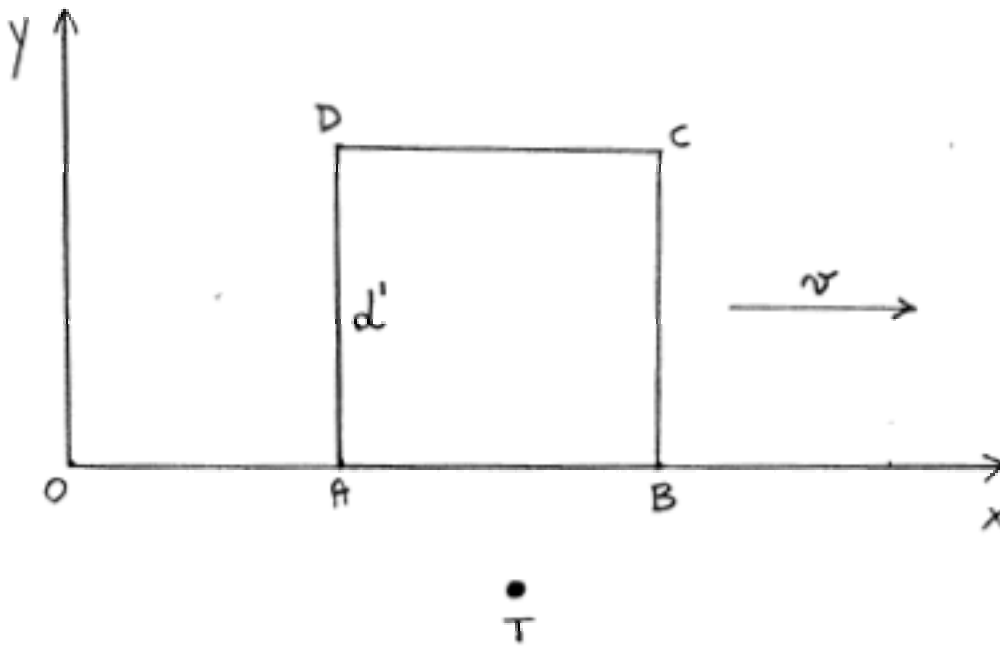


Figura 74

misurato da un osservatore  $T$  che si trova (sul piano della figura) a grande distanza (che veda cioè il quadrato sotto un piccolo angolo  $\theta$ , che è lo stesso, che riceva la luce proveniente dai diversi spigoli del quadrato sotto forma di raggi paralleli). Come arriva agli occhi di  $S$  la luce proveniente dai quattro spigoli ?

La luce proveniente da  $A$  e da  $B$  arriverà prima di quella proveniente da  $C$  e da  $D$ , infatti questi ultimi spigoli sono più distanti da  $T$  dei primi due, che è lo stesso, la luce proveniente da  $C$  e da  $D$  che arriva agli occhi dell'osservatore è stata emessa prima di quella proveniente da  $A$  e  $B$  arrivata agli occhi dello stesso osservatore.

Mentre la luce proveniente da  $C$  inizia a propagarsi, il quadrato si va spostando verso destra con velocità  $v$ . Ciò comporta che la luce proveniente da  $C$  non arriva agli occhi dell'osservatore: essa incontra sulla sua strada il lato  $AB$  del quadrato che, nel frattempo si è fatto avanti.

La luce proveniente da  $D$  arriverà invece a  $T$  senza incontrare alcun ostacolo proprio per lo stesso motivo per cui la luce proveniente da  $C$  non arriva a  $T$  (il lato  $AB$  del quadrato si è spostato in avanti e lascia il passo alla luce proveniente da  $D$ ). Quando la luce proveniente da  $D$  è arrivata all'altezza dell'asse  $x$ , avendo percorso il tragitto  $d = c \cdot \Delta t$  allora la luce emessa dagli spigoli  $A$  e  $B$  parte simultaneamente a quella proveniente da  $D$  (arrivata sull'asse  $x$ ) ed arriva simultaneamente agli occhi di  $T$ .

Il quadrato apparirebbe allora a  $T$  distorto (figura 75) tanto più quanto più è grande la velocità  $v$ ,

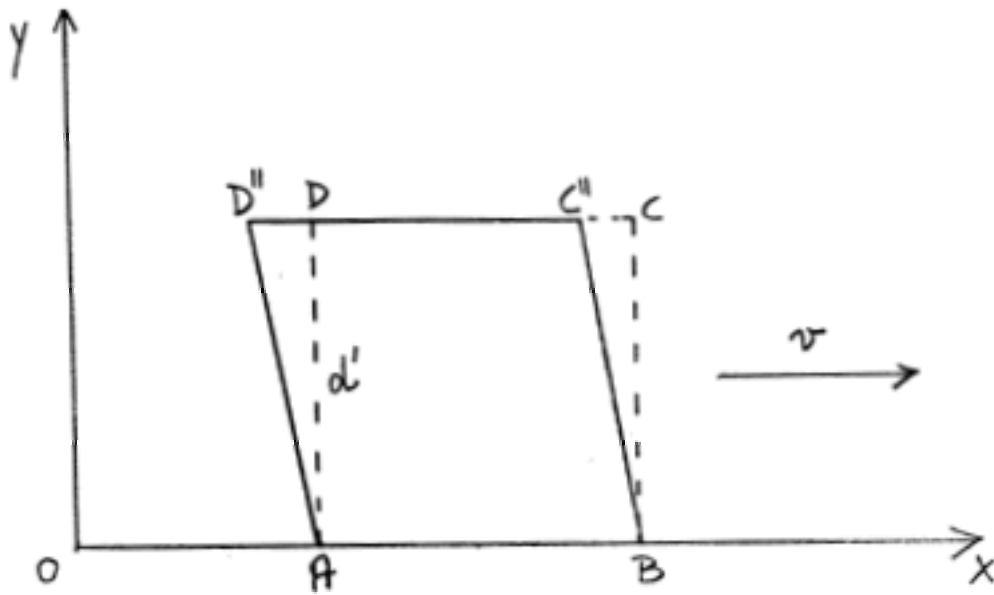


Figura 75

poiché:

$$(51) \quad \mathbf{D''D} = \mathbf{C''C} = v \cdot \Delta t$$

mentre rimane sempre:

$$(52) \quad \mathbf{d'} = \mathbf{DA} = \mathbf{CB} = c \cdot \Delta t$$

A questo punto però occorre tener conto della contrazione di Lorentz sul lato  $\mathbf{d}$  del quadrato in moto parallelamente all'asse  $x$ . La lunghezza  $\mathbf{d}$  per questi lati del quadrato ( $AB$  e  $CD$ ) che  $T$  misura è data da:

$$d = d' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

si veda, allo scopo, figura 76. Il quadrato appare così ruotato di un angolo  $\alpha$  tanto maggiore quanto maggiore è  $v$ . Si può anche calcolare il valore di  $\alpha$ . Poiché i tempi  $\Delta t$  che compaiono nelle (51) e (52) sono gli stessi, dalla (52) si ricava che  $\Delta t = \mathbf{d}/c$ . Di conseguenza la (51) diventa:

$$\mathbf{D''D} = \mathbf{C''C} = (v/c) \cdot \mathbf{d'}$$

Dalla figura 76, confrontata con la 75, si vede che:

$$\mathbf{D'A} = \mathbf{D''D}$$

e

$$\mathbf{C'B'} = \mathbf{C''C}$$

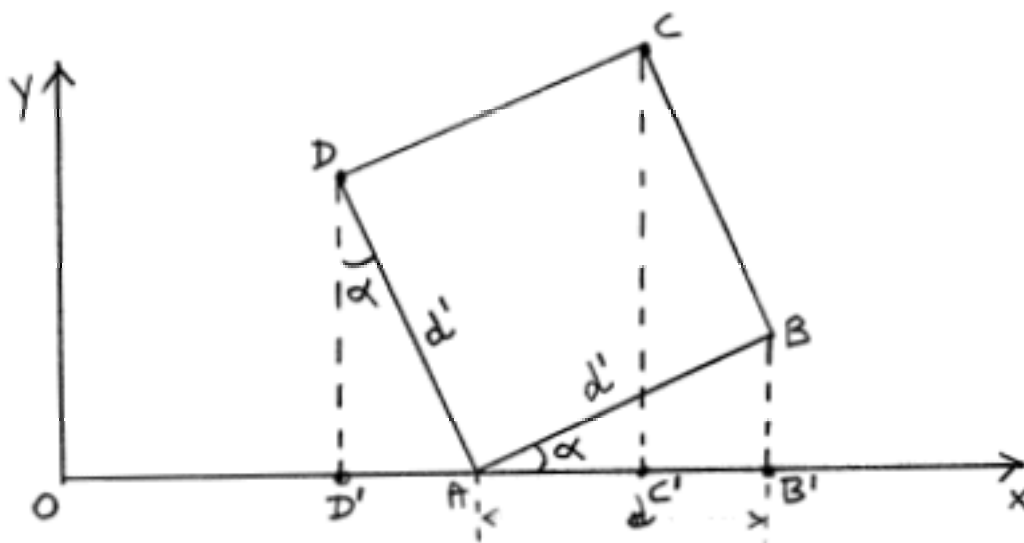


Figura 76

Di conseguenza:

$$(53) \quad D'A = C'B' = (v/c) \cdot d'$$

D'altra parte applicando il teorema dei triangoli rettangoli al triangolo DD'A si vede subito che:

$$(54) \quad D'A = d' \cdot \text{sen } \alpha$$

Confrontando la (53) e (54) si trova che:

$$\text{sen } \alpha = v/c.$$

Applicando poi un analogo teorema al triangolo AB'B si trova, che:

$$d = AB' = d' \cos \alpha = d' \sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = d' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

che è la relazione che già avevamo trovato.

In definitiva un oggetto in rapido movimento appare ruotato ad un osservatore in quiete.

## EQUIVALENZA MASSA-ENERGIA

E' appena il caso di accennare al fatto che la relazione di Einstein  $E = mc^2$  ha avuto le più svariate conferme sperimentali soprattutto nel campo della fisica nucleare e delle particelle elementari. D'altra parte l'applicazione più massiccia della relatività la si ha proprio in questi campi nei quali si ha a che fare con velocità elevatissime realizzate all'interno degli acceleratori di particelle. Insomma la relatività ristretta è oggi una certezza della fisica o, per meglio dire, essa rappresenta una descrizione più completa del mondo naturale di quella fornitaci dalla fisica classica. Con ciò non intendiamo dire che la fisica classica sia da buttar via, tutt'altro; questa fisica è perfettamente valida nelle approssimazioni più

che legittime di  $v \ll c$ . Praticamente tutti i fenomeni che ordinariamente ci circondano sono classici e solo un maniaco li tratterebbe relativisticamente (ben sapendo che, anche trattandoli relativisticamente, si otterrebbero dei risultati che differiscono da quelli classici per la 12-esima o 13-esima cifra decimale e che sfidano qualunque strumento di misura).

## UN ESEMPIO DI ELETTRODINAMICA RELATIVISTICA: IL CASO DELLA CARICA E DEL FILO CARICO IN MOTO RELATIVO.

All'inizio del paragrafo 2 di questo capitolo, quando abbiamo cominciato a discutere l'articolo di Einstein del 1905 sulla relatività, avevamo detto che uno dei motivi che muovevano Einstein erano le asimmetrie che presentava la trattazione ordinaria dell'elettrodinamica. In particolare avevamo discusso le azioni elettrodinamiche tra due cariche elettriche, ambedue cariche positivamente, nel caso di osservatore immobile rispetto alle cariche supposte in quiete e nel caso di osservatore in moto rispetto alle cariche in quiete (si riveda la figura 42). Sull'onda di asimmetrie di quel tipo Einstein sviluppò la relatività ristretta; noi abbiamo seguito alcuni sviluppi di questa relatività, è ora doveroso andare a vedere come la relatività risolve quel tipo di asimmetrie elettrodinamiche. Ridiscutiamo quindi il fenomeno cominciando con il ridisegnarci la figura 42 in un modo leggermente differente. Supponiamo di avere due particelle dotate di una stessa carica  $q$ . Siano esse in moto con velocità  $u$  rispetto ad un osservatore  $T$  supposto in quiete. Il moto avvenga in direzioni parallele e nello stesso verso (quello positivo dell'asse  $x$ ). Come ulteriore esemplificazione supponiamo poi che le due particelle abbiano la stessa ascissa  $x$  e si trovino ad una distanza  $r$ , data solo dalla differenza delle loro ordinate (figura 77a).

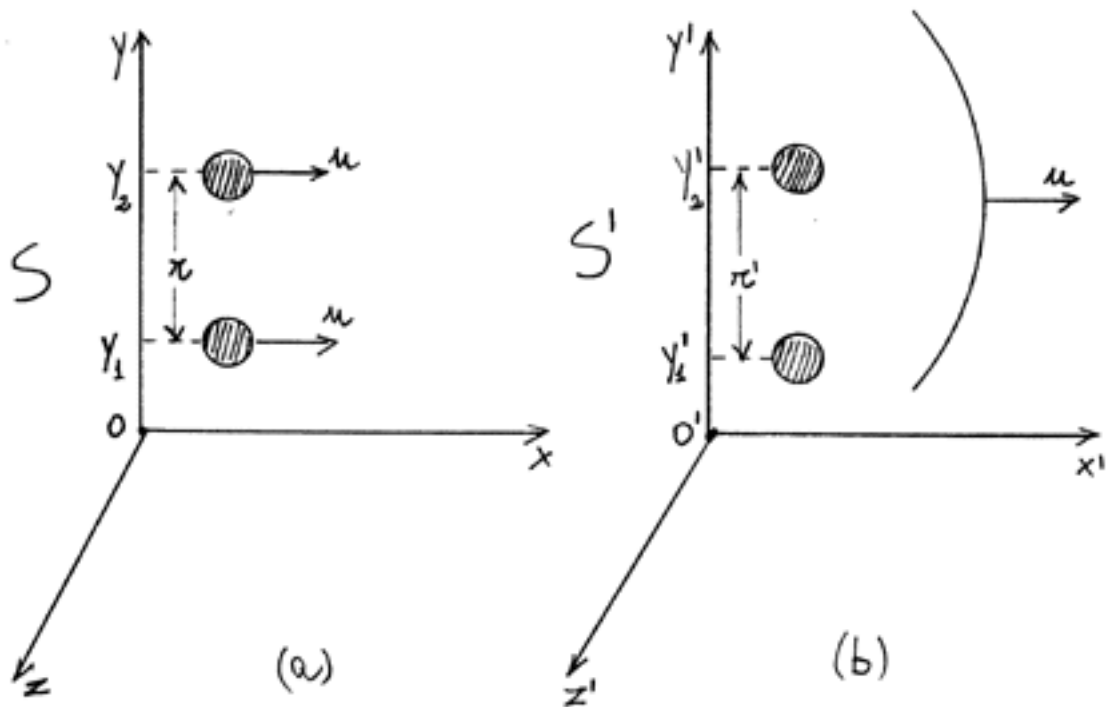


Figura 77

Su queste due cariche agisce una forza repulsiva dovuta alla legge di Coulomb ed una forza attrattiva dovuta alle azioni elettrodinamiche tra correnti (forza di origine magnetica). Se ora passiamo al riferimento  $S'$  in moto con la stessa velocità  $\mathbf{u}$  delle cariche, in questo riferimento le cariche risulteranno in quiete di modo che si dovrà sempre considerare la forza repulsiva coulombiana ma non si dovrà più tener conto della forza attrattiva di tipo magnetico (figura 77 b). E da qui proprio nasceva l'asimmetria che stiamo cercando di risolvere; possibile che le forze magnetiche siano un qualcosa che dipende dal riferimento?

Ebbene, quando ci troviamo su  $S'$ , dovremo considerare una forza repulsiva coulombiana, diretta lungo l'asse  $y'$ , che, come sappiamo, è data da:

$$F'_y = k \frac{q^2}{r^2}$$

Su ciascuna carica agirà questa forza diretta in verso opposto. Per calcolare quanto vale  $F_y$  si può far uso delle (43) tenendo conto che, come abbiamo già trovato (vedi paragrafo 2 di questo capitolo), la carica è invariante per una trasformazione di Lorentz e che, ancora le trasformazioni di Lorentz, ci assicurano che  $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$  e cioè  $\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{y}'$  ed in definitiva  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Si trova allora:

$$F_y = F'_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = k \frac{q^2}{r^2} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

avendo osservato che  $F_x = F_y = 0$  e che  $F_z = F'_z (1 - u^2/c^2)^{1/2}$ . Anche dal riferimento  $S$ , quindi, si osserva, una repulsione. Essa sarà più piccola del fattore  $(1 - u^2/c^2)^{1/2}$  rispetto a quella che si osserverà da  $S'$ . È importante notare che forza repulsiva minore comporta un moto di allontanamento delle cariche più lento. Quest'ultimo fatto è conseguenza diretta del fenomeno di dilatazione del tempo che da  $S$  si osserva su  $S'$ .

Da quanto detto si possono ricavare almeno due conclusioni apparentemente diverse:

- 1) le forze magnetiche sono forze di origine relativistica;
- 2) le forze elettriche e magnetiche sono della stessa natura e tanto vale parlare di forze elettromagnetiche (i due tipi di forza sono sempre presenti e la forza elettrica è un caso particolare di forza elettromagnetica quando risulta  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ),

Al risultato trovato possiamo giungere anche per altra via, utilizzando le equazioni di trasformazione per i campi (14) che noi riscriviamo ora in altra forma [le inverse delle (14) introducendo il vettore  $\mathbf{B}$  in luogo del vettore  $\mathbf{H}$  e ponendo  $\mathbf{u}$  in luogo di  $\mathbf{v}$ ]:

$$\setminus \left\{ \begin{array}{l} E_x = E'_x \\ E_y = \frac{E'_y + \frac{u}{c} B'_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ E_z = \frac{E'_z - \frac{u}{c} B'_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

(14 bis)

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = B'_x \\ B_y = \frac{B'_y - \frac{u}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ B_z = \frac{B'_z + \frac{u}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Cominciamo con il considerare i campi nel sistema  $S'$  (figura 77 b). Poiché ora si ha solo a che fare con il campo coulombiano diretto lungo l'asse  $y'$ , si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = 0 \\ E'_y = k \frac{q}{r^2} \\ E'_z = 0 \end{array} \right.$$

(14 ter)

$$\left\{ \begin{array}{l} B'_x = 0 \\ B'_y = 0 \\ B'_z = 0 \end{array} \right.$$

Mettiamoci ora nel sistema S ed utilizziamo le equazioni (14 bis) di trasformazione. Sostituendo i valori delle (14 ter) nelle (14 bis), si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_y = \frac{k \frac{q}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ E_z = 0 \end{array} \right.$$

(14 quater)

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = \frac{\frac{u}{c} k \frac{q}{r^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right.$$

Come risultato delle trasformazioni relativistiche troviamo un risultato ben comprensibile classicamente. Quando osserviamo due cariche in moto (due correnti elementari concordi come nel caso di figura 77 a) oltre al campo coulombiano  $\mathbf{E}$  si genera un campo magnetico  $\mathbf{B}$  diretto perpendicolarmente al piano formato dalla direzione della forza e dalla direzione del campo elettrico (regola di Fleming della mano sinistra). Si osservi che  $\mathbf{B}_z$ , in figura 77 a, è diretto lungo il verso positivo dell'asse z, perpendicolarmente alla figura.

Il campo magnetico  $B_z$  nasce come conseguenza delle trasformazioni relativistiche in accordo con quanto visto precedentemente.

E questo per quel che riguarda i campi.

La forza agente su una delle due cariche si può calcolare mediante la relazione che ci fornisce la forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Lo sviluppo di questa relazione nelle sue componenti fornisce solo quella lungo l'asse y, a seguito delle (14 quater). Si trova:

$$F_y = q\left(E_y - \frac{u}{c}B_z\right) = q\left[\frac{k\frac{q}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{u}{c}\frac{\frac{u}{c}k\frac{q}{r^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right] = q\left[\frac{k - \frac{q}{r^2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right] = k\frac{q^2}{r^2}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

e, come si può vedere, quest'ultimo risultato è esattamente lo stesso trovato in precedenza con altro procedimento.