L'EQUAZIONE FONDAMENTALE DELLA DINAMICA RELATIVISTICA

Riprendiamo in esame la (15):

$$(15)\cdots\cdots\cdots\cdots\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Abbiamo già trovato che quando forza, accelerazione e velocità sono vettori tra loro paralleli, si trova [vedi la (23)]:

$$(23)\cdots\cdots\cdots\cdots\vec{F}=\frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

che si può anche scrivere:

$$(23bis)\cdots\cdots\cdots\cdots\vec{F}=\frac{m_o\vec{a}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

avendo posto **dv/dt = a**.

Ma, nel caso più generale, quando forza, accelerazione e velocità non sono più vettori tra loro paralleli, come si sviluppa la (15) ? Ricordando che **p = mv** e che sia **m** che **v** sono grandezze variabili, la (15) diventa (si tratta di far la derivata di un prodotto tra due funzioni):

$$(31)\cdots\cdots\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=m\frac{d\vec{v}}{dt}+\vec{v}\frac{dm}{dt}=m\vec{a}+\vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Quanto vale **dm/dt** ? Sappiamo che $\mathbf{m = E/c^2}$ [dalla (25)] e che $\mathbf{E = E_c + m_0c^2}$ [dalla (24 bis)], mettendo insieme queste due relazioni si trova:

$$m=\frac{E_c}{c^2}+m_0$$

Ed allora per **dm/dt** si ha:

$$(32)\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{dm}{dt}=\frac{1}{c^2}\frac{dE_c}{dt}$$

essendo $\mathbf{m_0}$ una costante.

Dalla dinamica classica sappiamo che:

$$dE_c=\vec{F}\times\vec{ds}=F\cdot ds\cdot\cos\alpha$$

(dove **α** è l'angolo fra le direzioni di **F** e **ds**) cioè che l'energia cinetica elementare $\mathbf{dE_c}$ è data dal prodotto scalare (x) della forza **F** per lo spostamento elementare **ds**; la precedente relazione si può anche scrivere:

$$dE_c = \vec{F} \times \vec{v} \cdot dt \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \times \vec{v}$$

La (32) diventa allora:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2}(\vec{F} \times \vec{v})$$

Introducendo questa espressione nella (31) si trova:

$$(33) \cdots\cdots \vec{F} = m\vec{a} + \frac{\vec{v}}{c^2}(\vec{F} \times \vec{v})$$

che è l'equazione fondamentale della dinamica relativistica.

La (33) si può anche scrivere:

$$(33bis) \cdots\cdots F = ma + \frac{v^2}{c^2}\cos\alpha$$

e, da quanto scritto, si può subito vedere che per **v << c** il secondo termine del secondo membro è trascurabile di modo che la (33) fornisce il 2° principio della dinamica nell'approssimazione, appunto, **v << c**.

Ricaviamoci ora l'accelerazione $\vec{a}$ dalla (33):

$$(34) \cdots\cdots \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{\vec{v}}{mc^2}(\vec{F} \times \vec{v})$$

Si può subito vedere che l'accelerazione e la forza non hanno, in generale, la stessa direzione (si veda figura 69) poiché ad $\vec{F}$ occorre sommare il vettore-secondo-termine-del-secondo-membro che non ha necessariamente la direzione di $\vec{F}$ (questo fatto non si verificava in dinamica classica). Inoltre, sempre

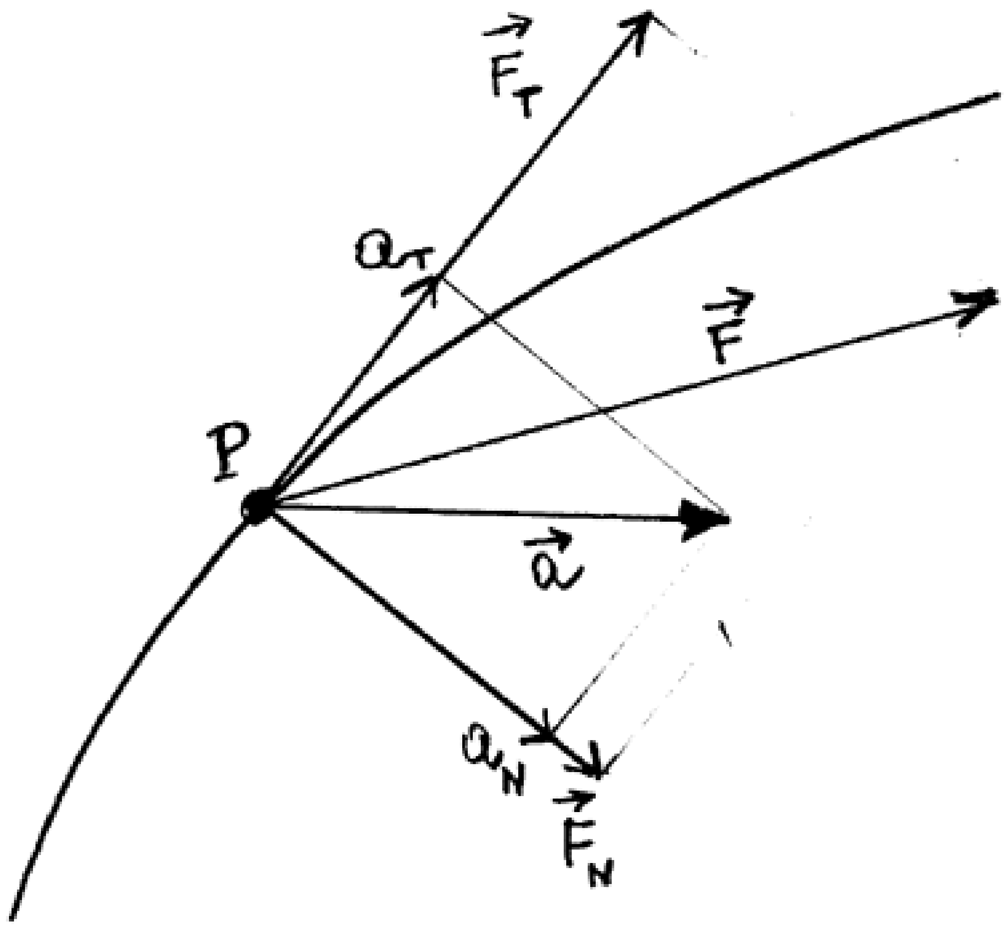

Figura 69

dalla figura 69 si può vedere che invece le componenti tangenziali $\mathbf{a_T}$ e $\mathbf{F_T}$ della forza e dell'accelerazione e le componenti normali $\mathbf{a_N}$ e $\mathbf{F_N}$ sempre della forza e dell'accelerazione hanno rispettivamente stessa direzione e stesso verso (si noti che risulta sempre $\mathbf{F_T} > \mathbf{F_N}$).

Indaghiamo un poco meglio le componenti tangenziale e normale della forza F (rispettivamente $\mathbf{F_T}$ ed $\mathbf{F_N}$) riprendendo in esame la (31):

$$(31)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Dalla (33) si può cominciare a vedere che se $\vec{F}$ è parallela a $\vec{v}$, allora si avrà anche che $\vec{a}$ è parallela ad $\vec{F}$ e $\vec{v}$. Siamo nel caso di un moto rettilineo, ed in questo caso particolare, sviluppando la (31), si trova [si riguardino i conti che ci hanno condotto dalla (22) alla (23)]:

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \Rightarrow$$

$$(23)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\vec{F} = \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Date le nostre premesse sul parallelismo esistente tra forza, velocità ed accelerazione, la quantità **d**$\vec{v}$**/dt** è un'accelerazione tangenziale $\overrightarrow{a_T}$, mentre la quantità $\frac{m_0}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ può essere interpretata come la massa che si ottiene per un moto rettilineo, e cioè una massa longitudinale $\mathbf{m_L}$. Si può allora scrivere la (23) nel modo seguente:

$$(23bis)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\overrightarrow{F_T} = m_L \cdot \overrightarrow{a_T}$$

avendo indicato con $\mathbf{m_L}$ la quantità:

$$(35)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots m_L = \frac{m_o}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nel caso invece in cui la forza $\vec{F}$ che compare nella (33) risulti perpendicolare alla velocità $\vec{v}$, la stessa forza risulterà parallela all'accelerazione $\vec{a}$. Questo perché quando forza e velocità sono perpendicolari formano tra loro un angolo α di 90°; se α è di 90° ai avrà che cos α = 0 ; e se cos α = 0 il secondo termine del secondo membro della (33 bis) si annulla; allora si avrà $\vec{F} = m\vec{a}$ e cioè $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$.

Scriviamo esplicitamente quest'ultima espressione. Si ha:

$$\vec{F} = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Date le nostre premesse di perpendicolarità esistente tra velocità da una parte e forza ed accelerazione dall'altra, si avrà, in analogia con quanto visto per la (23 bis) e la (35):

$$(23ter)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\overrightarrow{F_N} = m_T \cdot \overrightarrow{a_N}$$

dove:

$$m_T = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \tag{36}$$

rappresenta quella che va sotto il nome di massa trasversale (al movimento).