APPENDICE 1

CAMPI CONSERVATIVI

CIRCUITAZIONE DI UN VETTORE LUNGO UNA LINEA CHIUSA

CORRENTE DI SPOSTAMENTO

Quando un punto materiale P si sposta di un tratto $\vec{s}$ per effetto di una forza $\vec{F}$ costante applicata ad esso, si dice che il lavoro L, fatto dalla forza $\vec{F}$, è dato da:

$$L = \vec{F} \times \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

dove α è l'angolo formato tra la direzione della forza e quella dello spostamento. Si deve osservare che nel caso in cui forza e spostamento abbiano lo stesso verso, α vale 0° e di conseguenza cos α vale 1. Si trova così che L = F.s. Più in generale la relazione data vuol dire che se forza e spostamento formano un dato angolo α tra loro, il lavoro fatto è sempre minore di F.s, risultando uguale alla forza per la proiezione dello spostamento su di essa o, viceversa, allo spostamento per la proiezione della forza su di esso. Nel caso limite di forza e spostamento perpendicolari tra loro (α = 90°), poiché cos α = 0, risulta L = 0.

Nel caso più generale possibile, quando ad effetto della forza $\vec{F}$, il punto P percorre una linea r (figura 1), poiché le direzioni relative di forza e spostamento variano continuamente, per ottenere il lavoro fatto dalla forza $\vec{F}$ occorrerà sommare tanti piccoli lavori (lavori elementari o infinitesimi) ottenuti moltiplicando la forza $\vec{F}$ per la proiezione Δs.cos α del piccolo spostamento Δs, che si è originato, sulla forza.

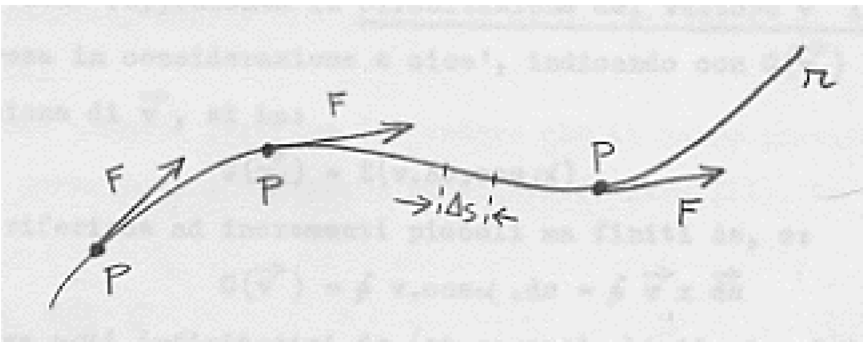

Figura 1

Indicando con Σ la somma di tutti i lavori elementari così ottenuti spostandosi lungo la linea r, per il lavoro complessivo L si ottiene:

$$\mathbf{L = \Sigma_{r}\,(F.\Delta s.\cos\alpha)}$$

In realtà la variazione di direzione della forza rispetto allo spostamento la si ha, praticamente, punto per punto ed allora, invece di considerare spostamenti piccoli ma finiti Δs, conviene introdurre spostamenti infinitesimi ds. Introducendo questi ultimi il simbolo di somma, prima indicato con Σ, si scrive ora in altro modo, $\int$, e si chiama integrale. L'ultima relazione scritta si può allora scrivere:

$$L = \int_r F \cdot \cos\alpha \cdot ds = \int_r \vec{F} \times \overrightarrow{ds}$$

dove l'integrale, come del resto la somma Σ vista precedentemente, si intende esteso lungo tutta la linea r.

Nel caso in cui la linea r risulti chiusa e supponendo di considerare, non più la forza $\vec{F}$, ma un altro vettore qualunque $\vec{v}$, l'espressione che si ottiene rappresenta la **circuitazione del vettore** $\vec{v}$ **lungo la linea chiusa** presa in considerazione e cioè, indicando con $C(\vec{v})$ l'espressione circuitazione di $\vec{v}$ si ha:

$$C(\vec{v}) = \Sigma(v \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha)$$

se ci si riferisce ad incrementi piccoli ma finiti Δs, e:

$$C(\vec{v}) = \oint v \cdot \cos\alpha . ds = \oint \vec{v} \times \overrightarrow{ds}$$

se si passa agli infinitesimi ds (si osservi che il circoletto sovrapposto all' integrale indica che ci si sposta su di una linea chiusa).

La definizione di circuitazione serve per studiare alcune proprietà dei campi ed in particolare per scoprire se essi sono conservativi o no.

Ricordo che un **campo conservativo** è un campo di forze in cui il lavoro compiuto dalle forze del campo non dipende dalla particolare traiettoria seguita dal loro punto di applicazione ma solo dalla posizione iniziale e finale di tale punto. Se cioè all'interno di un campo di forze abbiamo due punti A e B ed una forza $\vec{F}$ applicata ad un punto materiale P, il lavoro fatto da $\vec{F}$ è lo stesso sia che ci si muova lungo una data linea 1 o lungo un'altra linea 2 o qualunque altra si decida (figura 2). Questo

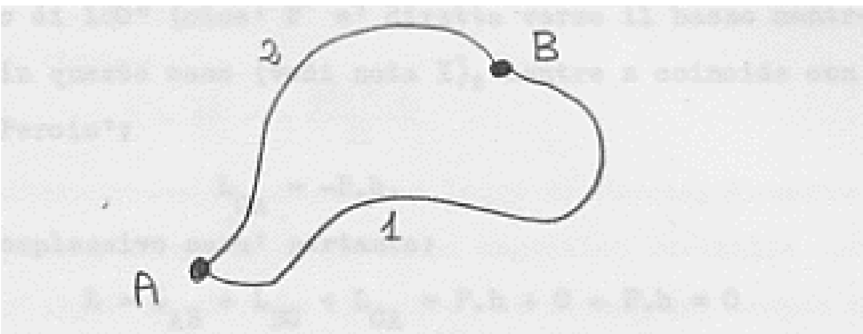

Figura 2

fatto, cioè l'uguaglianza del lavoro fatto da $\vec{F}$ spostandosi, ad esempio, lungo la linea 1 o la 2, comporta una conseguenza importante; se partiamo da A ed andiamo a B lungo la linea 1, e quindi da B torniamo ad A l'ungo la linea 2 (se percorriamo cioè una linea chiusa in un campo conservativo) il lavoro fatto per andare da A a B sarà $(L_{AB})_1$, che risulterà lo stesso in valore assoluto, ma di segno opposto, di quello $(L_{BA})_2$, fatto nel tornare da B ad A.

In definitiva il lavoro fatto per muoversi lungo la linea chiusa sarà nullo, e cioè:

$$\mathbf{L = (L_{AB})_1 + (L_{BA})_2 = (L_{AB})_1 - (L_{AB})_2 = 0}$$

Si può quindi concludere, usando il concetto di circuitazione precedentemente introdotto, che la circuitazione di un vettore in un campo conservativo è nulla.

Come esempio possiamo far vedere che il campo gravitazionale è conservativo servendoci di un piano inclinato (figura 3). La forza è ora la forza peso che agisce, ad esempio, su di una piccola massa m.

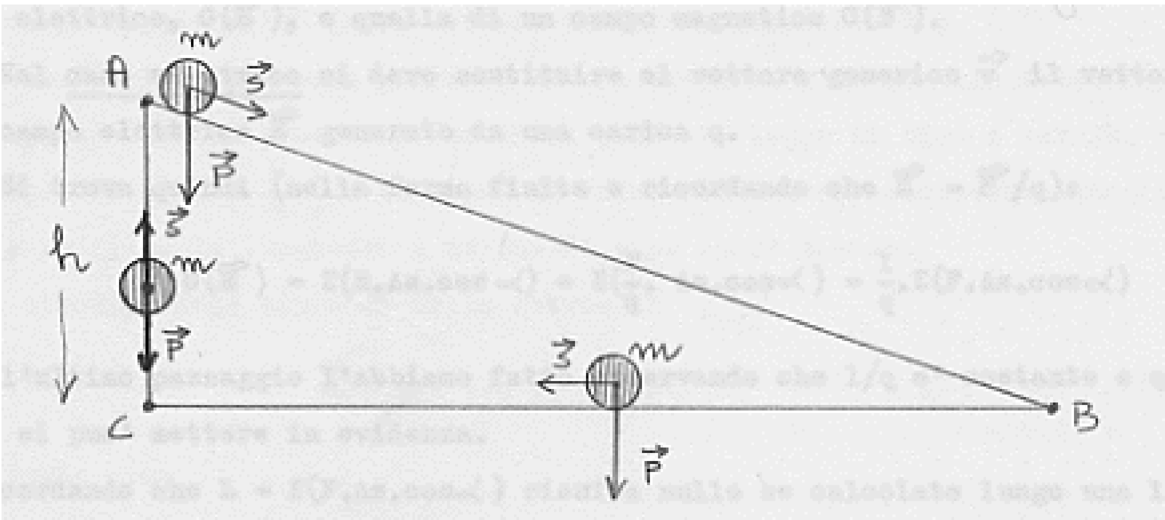

Figura 3

Calcoliamoci il lavoro fatto dalla forza peso ($\vec{P}$) per far spostare m prima da A a B, poi da B a C e quindi da C ad A (linea chiusa). Per calcolarci L_{AB} osserviamo che la proiezione dello spostamento $\overrightarrow{AB}$ nella direziono della forza $\vec{P}$ è $\overrightarrow{AC}$, cioè h. Si ha quindi:

$$\mathbf{L_{AB} = P.h}$$

Per calcolarci L_{BC} osserviamo che quando m si sposta per andare da B a C lo spostamento risulta perpendicolare alla forza, per cui:

$$\mathbf{L_{BC} = 0}$$

Per calcolarci L_{CA} osserviamo che la forza e lo spostamento formano tra loro un angolo di 180° (cioè $\vec{F}$ è diretta verso il basso mentre $\vec{s}$ verso l'alto) ed in questo caso, mentre s coincide con h, si ha che cos α = -1. Perciò:

$$\mathbf{L_{CA} = - P.h}$$

II lavoro complessivo sarà pertanto:

$$\mathbf{L = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = P.h + 0 - P.h = 0}$$

Cioè uguale a zero come preannunciato.

In accordo con la definizione di circuitazione si può allora scrivere, nel caso del campo gravitazionale:

$$C(\vec{P}) = 0$$

o anche:

$$\mathbf{\Sigma(P.\Delta s.\cos\alpha) = 0}$$

o meglio:

$$\oint P \cdot \cos\alpha \cdot ds = \oint \vec{P} \times \overrightarrow{ds}$$

Ritorniamo ora, in breve, a considerare la circuitazione di un campo elettrico, $C(\vec{E})$, e quella di un campo magnetico $C(\vec{B})$.

- Nel **caso elettrico** si deve sostituire al vettore generico $\vec{v}$ il vettore campo elettrico $\vec{E}$ generato da una carica q.

Si trova quindi (nella forma finita e ricordando che $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$):

$$C(\vec{E}) = \Sigma(E \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha) = \Sigma\left(\frac{F}{q} \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha\right) = \frac{1}{q} \cdot \Sigma \cdot (F \cdot \Delta s.\cos\alpha)$$

e l'ultimo passaggio l'abbiamo fatto osservando che 1/q è costante e quindi si può mettere in evidenza. Ricordando che L = Σ(F.Δs.cosα) risulta nullo se calcolato lungo una linea chiusa in un campo conservativo, si può scrivere:

$$C(\vec{E}) = 0$$

e tale fatto esprime la proprietà del campo elettrostatico di essere conservativo (la stessa cosa vale, come abbiamo visto per il campo gravitazionale).
L'ultima espressione vista, utilizzando gli infinitesimi, si può scrivere;

$$\oint \vec{E} \times \overrightarrow{ds}$$

Se il campo elettrico $\vec{E}$ anziché essere costante è variabile (non è cioè conservativo), l'espressione per la circuitazione che lo rappresenta è un'altra:

$$C(\vec{E}) = -\frac{\Delta\Phi(\vec{B})}{\Delta t}$$

o, che è lo stesso:

$$\oint \vec{E} \times \overrightarrow{ds} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}.$$

E questo fatto rappresenta proprio la legge di Faraday-Newnann-Lenz che conosciamo. Ciò vuol dire che ad un campo magnetico variabile (prodotto da una corrente variabile in un dato circuito) si accompagna sempre un campo elettrodinamico (cioè una corrente indotta in un altro circuito). Inoltre, da quanto detto si deduce che i campi elettrici non possono essere studiati separatamente da quelli magnetici ogni qual volta essi subiscano delle variazioni nel tempo. E' anche evidente che, in questo caso, alla circuitazione di $\vec{E}$ si dà il nome di forza elettromotrice indotta $\mathcal{E}$, per cui l'ultima relazione scritta diventa proprio la legge che conosciamo:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}.$$

— Nel **caso magnetico** si deve sostituire al vettore generico $\vec{v}$ il vettore campo magnetico $\vec{H}$ (o il vettore induzione magnetica $\vec{B}$).

Consideriamo il campo generato ad una distanza r da un filo rettilineo percorso da corrente; come si ricorderà, per la legge di Biot e Savart, Questo campo varrà $\vec{H} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$ e le linee di forza saranno circonferenze concentriche al filo; la lunghezza d di una di esse sarà d = 2πr.

La circuitazione espressa nella forma:

$$C(\vec{H}) = \Sigma(H \cdot \Delta s \cdot \cos\alpha)$$

diventa ora:

$$C(\vec{H}) = H \cdot \Sigma(\Delta s . \cos\alpha) = H \cdot d = H \cdot 2\pi r$$

avendo tenuto conto del fatto che, lungo una circonferenza concentrica al filo, H è costante (e quindi si può mettere in evidenza) e di quanto annunciato poco fa e cioè che d = 2πr = Σ(Δs.cos α).

Sostituendo ad H il suo valore si trova, l'espressione definitiva:

$$C(\vec{H}) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{i}{r} .2\pi r = i$$

e cioè:

$$C(\vec{H}) = i .$$

A questo stesso risultato si perviene qualunque sia la forma della linea chiusa, purché essa circondi la corrente (nel caso la linea chiusa non circondi la corrente si può dimostrare che $C(\vec{H}) = 0$).

Quanto fin qui visto è valido nel caso di un campo magnetico statico (che implica anche il caso di campo elettrico statico, come precedentemente visto) che, confrontando con quanto detto nel caso elettrostatico, non risulta conservativo.

Esaminiamo ora il seguente problema in un caso non più stazionario.

Vogliamo calcolarci la circuitazione di $\vec{H}$ lungo varie linee d_1, d_2, ,d_3 circondanti un circuito come quello mostrato in figura 4, costituito da un condensatore ed alimentato da una corrente sinusoidale i.

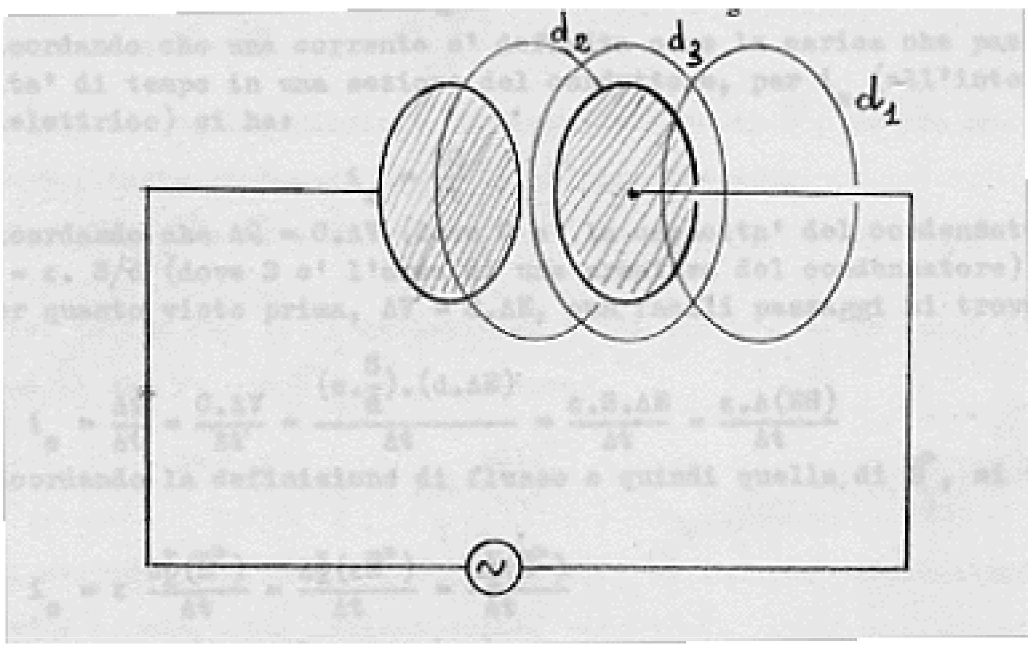

Figura 4

Sappiamo che la circuitazione calcolata su d_1 deve dare:

$$C_{d_1}(\overrightarrow{H}) = i$$

perché d_1 è una linea chiusa che circonda il filo percorso da corrente; la circuitazione lungo d_2 dovrebbe dare:

$$C_{d_2}(\overrightarrow{H}) = 0$$

poiché d_2 *non circonda* la corrente; ma qual è la circuitazione su d_3 che circonda un piatto del condensatore ? Essa. vale i o vale zero ?

Questa difficoltà si elimina con l'introduzione, fatta da Maxwell, della **corrente di spostamento** che serve a chiudere il circuito anche là dove sembra interrotto e cioè fra le armature del condensatore. Questa corrente è una corrente reale che esiste sempre quando si ha a che fare con campi variabili (e che si annulla quando i campi sono statici).

Ricordando che lo spostamento elettrico si indica con $\overrightarrow{D}$ e che $\overrightarrow{D} = \varepsilon \cdot \overrightarrow{E}$, ricaviamoci la corrente di spostamento i_S.

Ai capi del condensatore, istante per istante, si viene a stabilire una. differenza di potenziale ΔV. Nel dielettrico che si trova tra le armature si genera, un campo elettrico $\overrightarrow{E}$ che varia al variare di ΔV e risulta tanto più grande quanto più piccola è la distanza d tra le armature:

$$\Delta E = \frac{\Delta V}{d}$$

Ricordando che una corrente è definita come la carica che passa, nell'unità di tempo in una sezione del conduttore, per i_S (all'interno del dielettrico) si ha:

$$i_s = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Ricordando che $\Delta Q = C.\Delta V$ (dove C è la capacità del condensatore), che $C = \varepsilon \,.\, S/d$ (dove S è l'area di una armatura del condensatore) e che, per quanto visto prima, $\Delta V = d.\Delta E$, con facili passaggi si trova:

$$i_s = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{C \cdot \Delta V}{\Delta t} = \frac{\left(\varepsilon \cdot \frac{S}{d}\right) \cdot (d \cdot \Delta E)}{\Delta t} = \frac{\varepsilon \cdot S \cdot \Delta E}{\Delta t} = \frac{\varepsilon \cdot \Delta(ES)}{\Delta t}$$

Ricordando la definizione di flusso e quindi quella di $\vec{D}$, si trova:

$$i_S = \varepsilon \cdot \frac{\Delta\Phi(\vec{E})}{\Delta t} = \frac{\Delta\Phi(\varepsilon \cdot \vec{E})}{\Delta t} = \frac{\Delta\Phi(\vec{D})}{\Delta t}$$

dove il flusso di $\vec{D}$ è attraverso la superficie S del condensatore (nella prossima Appendice affronteremo il concetto di flusso).

La relazione precedente scritta utilizzando gli infinitesimi diventa:

$$i_s = \frac{d\Phi(\vec{D})}{dt}$$

che vuol dire che la corrente di spostamento i_S è direttamente proporzionale alla velocità di variazione del flusso di $\vec{D}$ attraverso le superfici del condensatore.

In definitiva, nel caso di campi variabili, bisogna considerare, a lato della corrente circolante nel conduttore, anche la corrente di spostamento nel dielettrico. Tenendo conto di ciò, la circuitazione di $\vec{H}$, nel caso non stazionario, diventa:

$$C(\vec{H}) = i + i_s$$

e cioè:

$$C(\vec{H}) = i + \frac{\Delta\Phi(\vec{D})}{\Delta t}$$

Quest'ultima espressione scritta in forma integrale diventa:

$$\oint \vec{H} \times \vec{ds} = i + \frac{d\Phi(\vec{D})}{dt}$$

Nel caso poi si voglia calcolare la circuitazione di $\vec{B}$, sempre nel caso non stazionario, basta ricordare che $\vec{B} = \mu \vec{H}$ per trovare:

$$\oint \vec{B} \times \vec{ds} = \mu i + \mu \frac{d\Phi(\vec{D})}{dt}$$

Si osservi infine che se il dielettrico è il vuoto e se in luogo di $\vec{D}$ sostituiamo il suo valore $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$ si trova:

$$\oint \vec{B} \times \vec{ds} = \mu_o i + \mu_o \varepsilon_o \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

Dove, al secondo termine del secondo membro, si incontra esplicitamente la quantità $\mu_o\varepsilon_o$ che, come abbiamo visto, vale $1/c^2$.