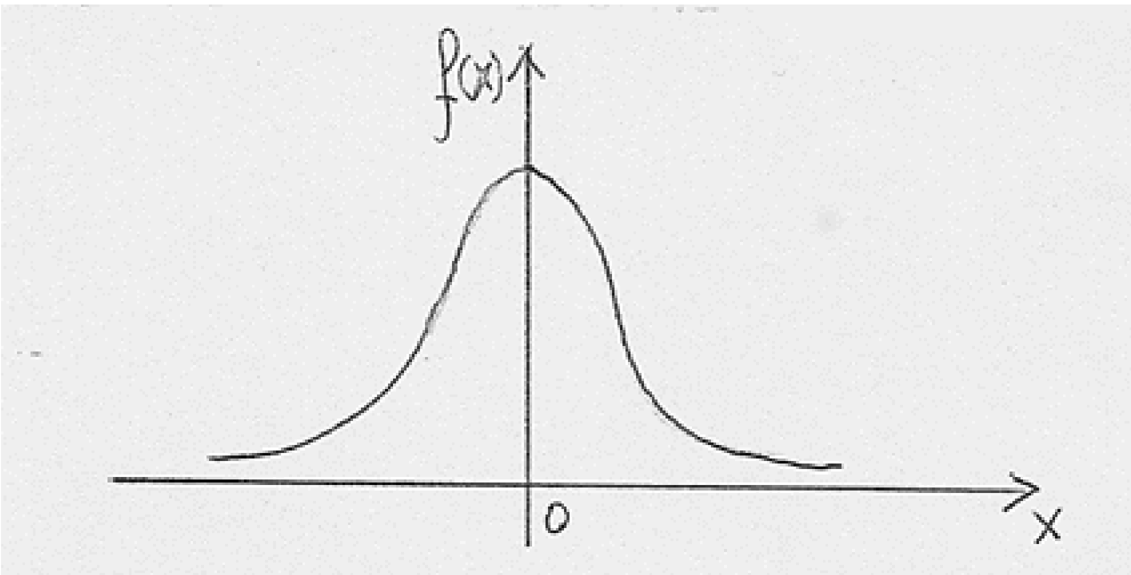
APPENDICE 10

La curva di Gauss ed alcuni integrali notevoli ad essa collegati

Ricordo l'espressione analitica ed il grafico della curva di Gauss o gaussiana:

$$f(x) = a \cdot e^{-bx^2}$$



Si tratta di una funzione pari della x, centrata in x = 0, e tendente a zero per $x \to \pm\infty$. La **a** è una costante di normalizzazione (poiché la gaussiana è una curva di distribuzione di probabilità e la probabilità matematica può valere al massimo 1, che corrisponde a certezza dell'evento, allora la **a** opera in modo che risulti $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$) mentre **b** è una costante da cui dipende l'apertura della curva (quanto più grande è **b**, quanto più stretta è la curva di distribuzione). La denominazione di curva di distribuzione di probabilità deriva dal fatto che essa indica qual è la probabilità f (x) di trovare un certo valore eseguendo una misura x. Questo è il motivo per il quale la curva di Gauss si chiama anche curva degli errori: fornisce una indicazione della distribuzione degli errori nell'eseguire una data misura (conoscendo il valore di **b** si può anche conoscere la precisione con cui è stata effettuata la misura).

Connessi alla funzione di Gauss vi sono funzioni che sono prodotto di essa con altre funzioni. Non è semplice calcolarsi gli integrali di tali funzioni ed è pertanto utile darne un metodo di risoluzione.

Gli integrali che vogliamo risolvere sono del tipo:

$$\mathcal{J}_n = \int_0^{\infty} x^n \cdot e^{-ax^2} dx$$

con n = 0, 1, 2, ….; il primo di tali integrali è proprio l'integrale della curva di Gauss:

$$\mathcal{J}_o = \int_o^\infty e^{-ax^2}\,dx$$

Si tratta di un integrale improprio, dipendente da un parametro. Per poter eseguire l'integrazione occorre che la funzione integranda sia non negativa (condizione senz'altro verificata trattandosi di esponenziale) e convergente (condizione anch'essa verificata). Per fare l'integrazione, iniziamo con il porre:

$$\mathcal{J}_{OM} = \int_o^M e^{-ax^2}\,dx = \int_o^M e^{-ay^2}\,dy$$

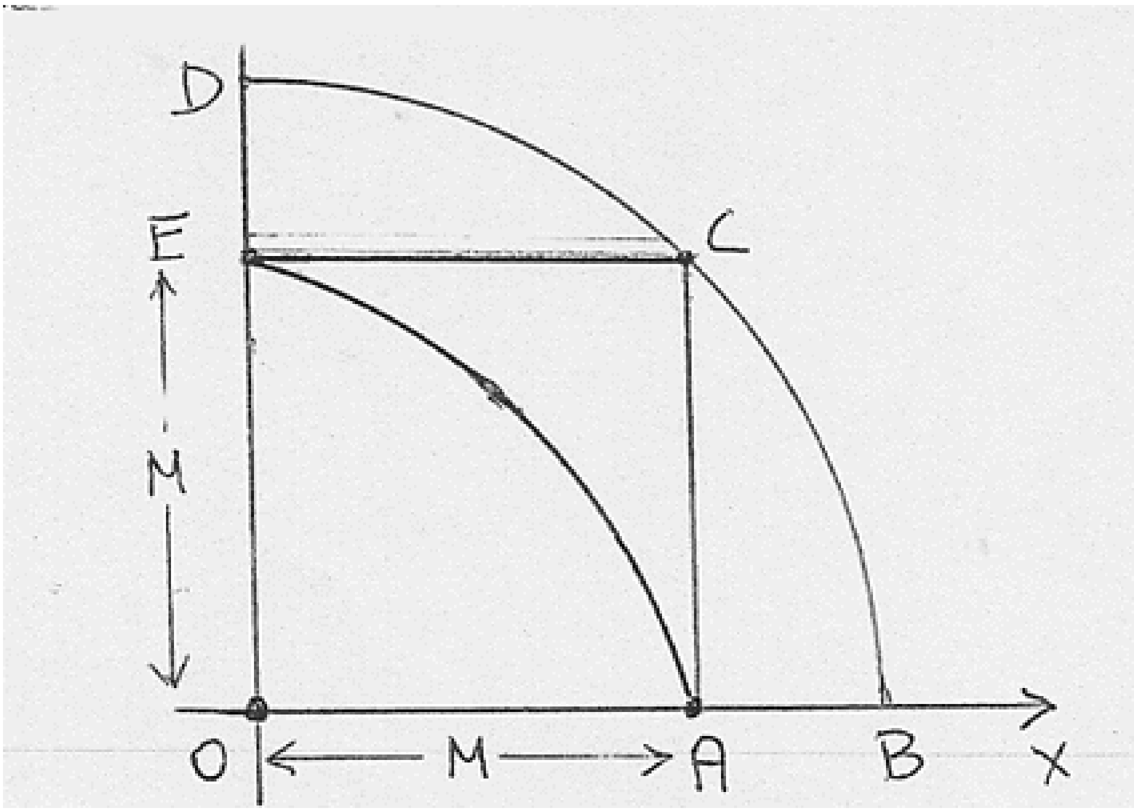
e sia:

$$\lim_{M\to\infty} \mathcal{J}_{OM} = \mathcal{J}_O$$

il valore cercato per il nostro integrale. Si ha:

$$\mathcal{J}^2_{OM} = \left(\int_O^M e^{-ax^2}\,dx\right)\left(\int_O^M e^{-ay^2}\,dy\right) = \iint_{O\to M} e^{-a\left(x^2+y^2\right)}dxdy = \iint_{Q_M} e^{-a\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

Dove Q_M è il quadrato di lato M mostrato in figura:

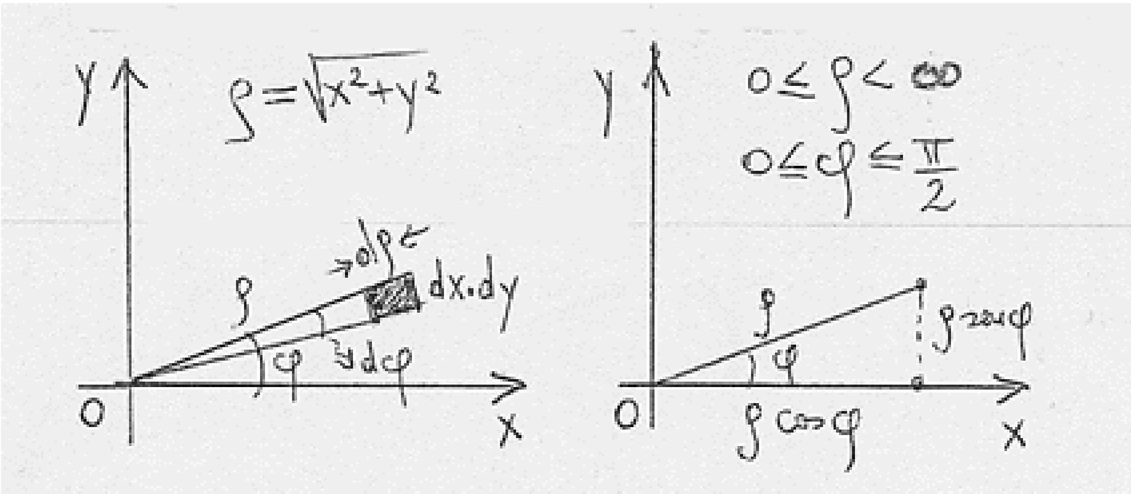


Poiché la funzione integranda è un esponenziale, essa è, come già detto, certamente positiva. Si ha quindi (riferendosi alla figura):

$$\iint_{C_M} e^{-a\left(x^2+y^2\right)}dxdy \le \mathcal{J}^2_{OM} \le \iint_{C_{M\sqrt{2}}} e^{-a\left(x^2+y^2\right)}dxdy$$

dove C_M e $C_M\sqrt{2}$ sono rispettivamente le circonferenze inscritta e circoscritta al dato quadrato Q_M.

Ricordando ora che l'elemento infinitesimo di area in coordinate cartesiane, dx.dy, è, in coordinate polari, dato da (si veda figura):



$$dx \cdot dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}\right| \cdot d\rho \cdot d\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho\cos\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho sen\varphi) & \frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho sen\varphi) \end{vmatrix} d\rho \cdot d\varphi =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho sen\varphi \\ sen\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} d\rho \cdot d\varphi = \rho(\cos^2\varphi + sen^2\varphi)d\rho \cdot d\varphi = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

per la catena di disuguaglianze con integrali doppi, si trova:

$$\int_O^{\pi/2} d\varphi \int_O^M \rho \cdot e^{-a\rho^2} d\rho \le \mathcal{J}^2_{OM} \le \int_O^{\pi/2} d\varphi \int_O^{M\cdot\sqrt{2}} \rho \cdot e^{-a\rho^2} d\rho \,.$$

Osservando ora l'immediatezza dell'integrale:

$$\int_O^M \rho \cdot e^{-a\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2a}\int_O^M -2a\rho \cdot e^{-a\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2a}\left[e^{-a\rho^2}\right]_O^M$$

si trova, successivamente:

$$[\varphi]_o^{\pi/2}\left\{-\frac{1}{2a}\left[e^{-a\rho^2}\right]_O^M\right\} \le \mathcal{J}^2_{OM} \le [\varphi]_o^{\pi/2}\left\{-\frac{1}{2a}\left[e^{-a\rho^2}\right]_O^{M\cdot\sqrt{2}}\right\}$$

$$-\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-aM^2}\right) \le \mathcal{J}^2_{OM} \le -\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2aM^2}\right)$$

Cambiando segno e passando al limite per $M \to \infty$ si ha:

$$\frac{\pi}{4a} \le \mathcal{J}^2_O \le \frac{\pi}{4a} \qquad => \qquad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \le \mathcal{J}_O \le \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

e, per il teorema del confronto:

$$\mathcal{J}_O = \int_o^\infty e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

L'integrale $\mathcal{J}_1$ e cioè:

$$\mathcal{J}_1 = \int_o^\infty x \cdot e^{-ax^2}dx$$

Si calcola in modo elementare. Si ha:

$$\mathcal{J}_1 = -\frac{1}{2a}\int_o^\infty -2ax \cdot e^{-ax^2}dx = -\frac{1}{2a}\left[e^{-ax^2}\right]_O^\infty = -\frac{1}{2a}(0-1)$$

e quindi:

$$\mathcal{J}_1 = \int_o^\infty x \cdot e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}.$$

Vediamo come si ottengono gli integrali successivi cominciando con il considerarli come funzioni del parametro che in essi figura. Si vede subito allora che:

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{d}{da}\mathcal{J}_o = -\frac{d}{da}\int_o^\infty e^{-ax^2}dx = \int_o^\infty -\frac{d}{da}e^{-ax^2}dx = -\int_o^\infty -x^2e^{-ax^2}dx = \int_o^\infty x^2e^{-ax^2}dx$$

Ritornando alla prima uguaglianza e sostituendo ad $\mathcal{J}_0$ il suo valore, si trova:

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{d}{da}\,\mathcal{J}_0 = -\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{a^3}}\right)$$

ed in definitiva:

$$\mathcal{J}_2 = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\,.$$

Allo stesso modo:

$$\mathcal{J}_3 = -\frac{d}{da}\,\mathcal{J}_1 = -\frac{d}{da}\,\frac{1}{2a} = \frac{1}{2a^2}$$

e quindi:

$$\mathcal{J}_3 = \int_o^\infty x^3 \cdot e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a^4}\,.$$

Ed ancora:

$$\mathcal{J}_4 = \frac{d^2}{da^2}\,\mathcal{J}_0 = \frac{d^2}{da^2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}$$

e quindi:

$$\mathcal{J}_4 = \int_o^\infty x^4 \cdot e^{-ax^2}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}}\,.$$

E così via.