L'EFFETTO DOPPLER CLASSICO (1842)

Abbiamo già detto che l'effetto Doppler consiste in una variazione apparente della frequenza delle onde emesse da. una sorgente per un moto relativo tra sorgente ed osservatore. Cerchiamo ora di ricavare una relazione che descriva il fenomeno in modo analitico.

Supponiamo di avere un osservatore O ed una sorgente di onde S (che per semplicità supponiamo essere una sorgente sonora come, ad esempio, un campanello elettrico). Quanto diremo è certamente valido per onde sonore ma, se lo è in linea di principio, non lo è in pratica per onde elettromagnetiche e quindi luminose. Saranno necessarie modificazioni relativistiche così come mostrato alla fine del paragrafo 4 del capitolo 7. Le onde emesse da S abbiano:

- velocità v
- lunghezza d'onda λ
- periodo $T = \lambda/v$
- frequenza $\nu = v/\lambda$

Consideriamo dapprima il caso di S ed O in quiete relativa (S in quiete rispetto ad O) riportato in figura 17.

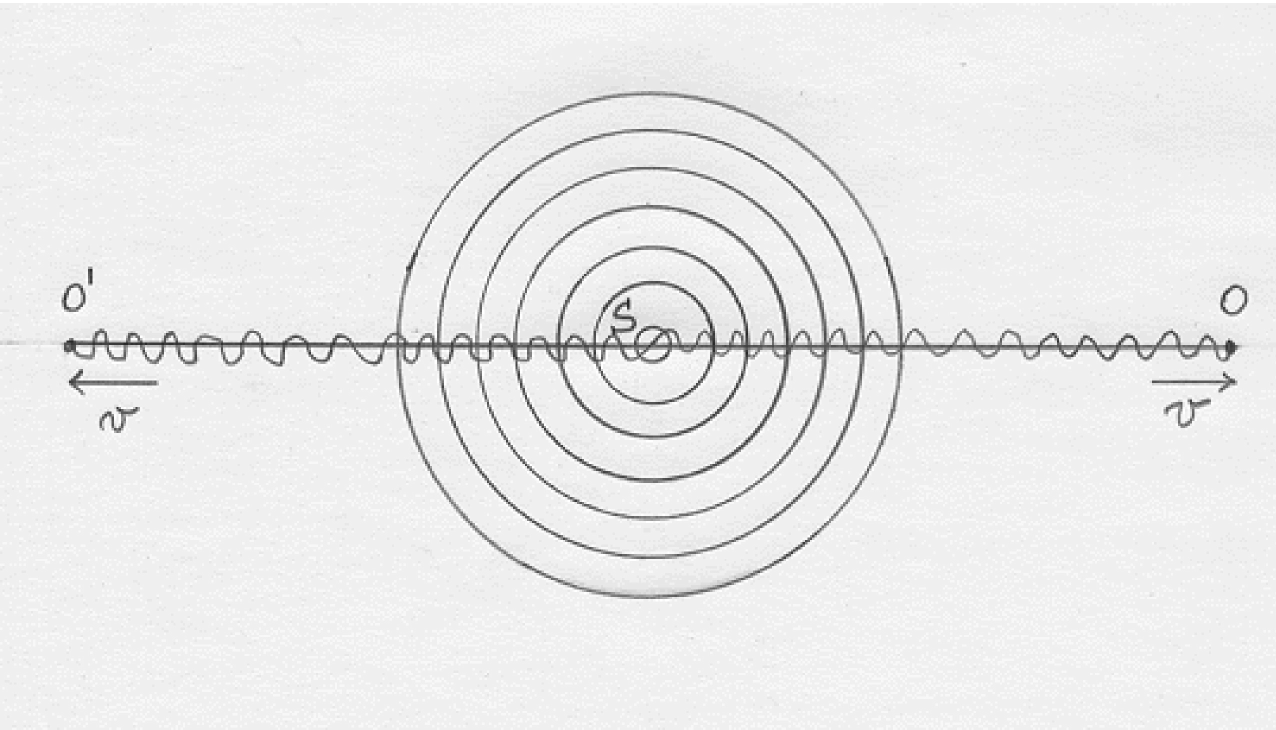

Figura 17

E' ovvio che ad O arriverà, ogni secondo, un numero di onde pari alla frequenza ν della sorgente S (è O che riceve la frequenza ν della sorgente). La stessa cosa accadrebbe ad un altro osservatore O' sistemato in posizione diametralmente opposta ad O: le onde emesse da S hanno tutte la stessa lunghezza d'onda λ e si propagano in tutte le direzioni con la stessa velocità v.

Se O ed S sono in moto relativo tra loro il fenomeno si svolge in modo diverso ed O riceverà una frequenza ν' maggiore o minore di quella precedente a seconda che, rispettivamente, O ed S si avvicinino oppure si allontanino tra loro. I casi da prendere in considerazione a questo punto sono vari:

1) S è in moto di avvicinamento od allontanamento da O che è in quiete;
2) O è in moto di avvicinamento od allontanamento da S che è in quiete;

3) O ed S sono ambedue in moto.
Indichiamo una volta per tutte con $\pm \mathbf{v_S}$ la velocità della sorgente e con $\pm \mathbf{v_O}$ la velocità dell'osservatore (dove i segni più sono per moti verso destra - in riferimento alla figura 17 - di S e di O, mentre i segni meno sono per moti verso sinistra) e ricordiamo che **v** è la velocità dell'onda emessa da S.

<u>I° CASO</u>

Cominciamo a considerare il caso 1 e supponiamo che O sia in quiete ed S si avvicini ad O con velocità $\mathbf{v_S}$ (figura 18).

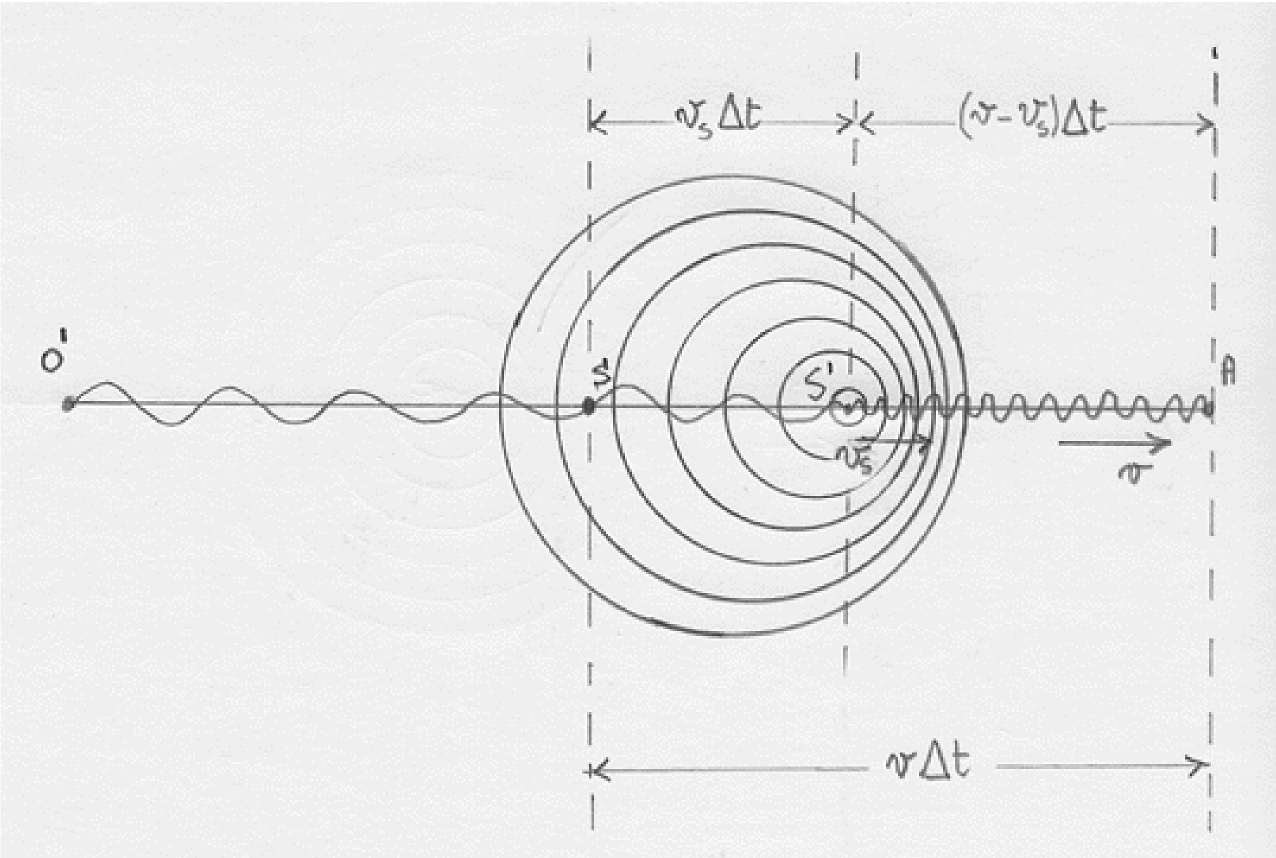

Figura 18

Supponiamo che ad un dato istante t_0 la sorgente occupi la posizione S e che dopo un tempo Δt si sia spostata in S', percorrendo una distanza $v_S.\Delta t$; dopo lo stesso tempo Δt le onde emesse da S saranno arrivate in A, percorrendo una distanza v.Δt. Durante il tempo Δt la sorgente avrà emesso complessivamente $\nu'.\Delta t$ onde le quali, poiché nel frattempo la sorgente si è spostata da S ad S', saranno tutte concentrate nel tratto S'A = $(v - v_S).\Delta t$. La lunghezza λ di ciascuna di queste onde sarà data da:

$$\lambda = \frac{(v - v_S)\cdot\Delta t}{\nu'\cdot\Delta t} \Rightarrow \lambda = \frac{v - v_S}{\nu'}$$

e marcerà con velocità v verso O. Quest'ultima dunque sarà la lunghezza d'onda della vibrazione percepita da O. Passando alle frequenze (ν =. v/λ.) si trova:

(1)
$$\nu = \frac{v}{\dfrac{v - v_S}{\nu'}} \Rightarrow \nu = \nu' \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{v_S}{v}}$$

e questa sarà la frequenza percepita da O. Dalla relazione scritta si vede subito che per $v > v_S$, la quantità $1 - v_S/v$ risulta positiva e minore di 1 e conseguentemente $1/(1 - v_S/v)$ risulta positivo e maggiore di 1. Ciò vuol dire che la frequenza ν percepita da O è maggiore di quella ν' emessa da S.

E' evidente che tutto quanto abbiamo detto può essere pensato da un altro punto di vista. Si può cioè pensare che S si allontani con velocità $-v_S$ dall'osservatore immobile O'. Con passaggi semplici si trova facilmente che vale ancora l'ultima relazione scritta, a patto, appunto, di sostituire $-v_S$ a v_S. Il risultato è che la frequenza ν percepita da O' sarà:

(2)
$$\nu = \nu' \cdot \frac{v}{v + v_S} \Rightarrow \nu = \nu' \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{v_S}{v}}$$

e poiché il fattore che moltiplica ν' è positivo e minore di 1, segue che la frequenza ν percepita sarà minore della frequenza ν' emessa da S.

II° CASO

E' utile premettere una considerazione. Poiché la frequenza ν è definita dal rapporto tra la velocità dell'onda (v) e la sua lunghezza d'onda (λ), per ottenere una variazione di ν, si può agire sia su λ, e come abbiamo visto nel caso precedente all'aumentare di λ si ha una diminuzione di ν mentre al suo diminuire si ha un aumento di ν (tutto questo a parità di v), oppure si può agire su v, all'aumento della quale aumenta ν e viceversa nel caso di diminuzione di v.

Supponiamo ora che S sia in quiete ed O si avvicini ad S con velocità v_0 (figura 19). E' chiaro che, dato il principio classico di relatività, tutto va come se O fosse fermo e l'onda, emessa dalla sorgente

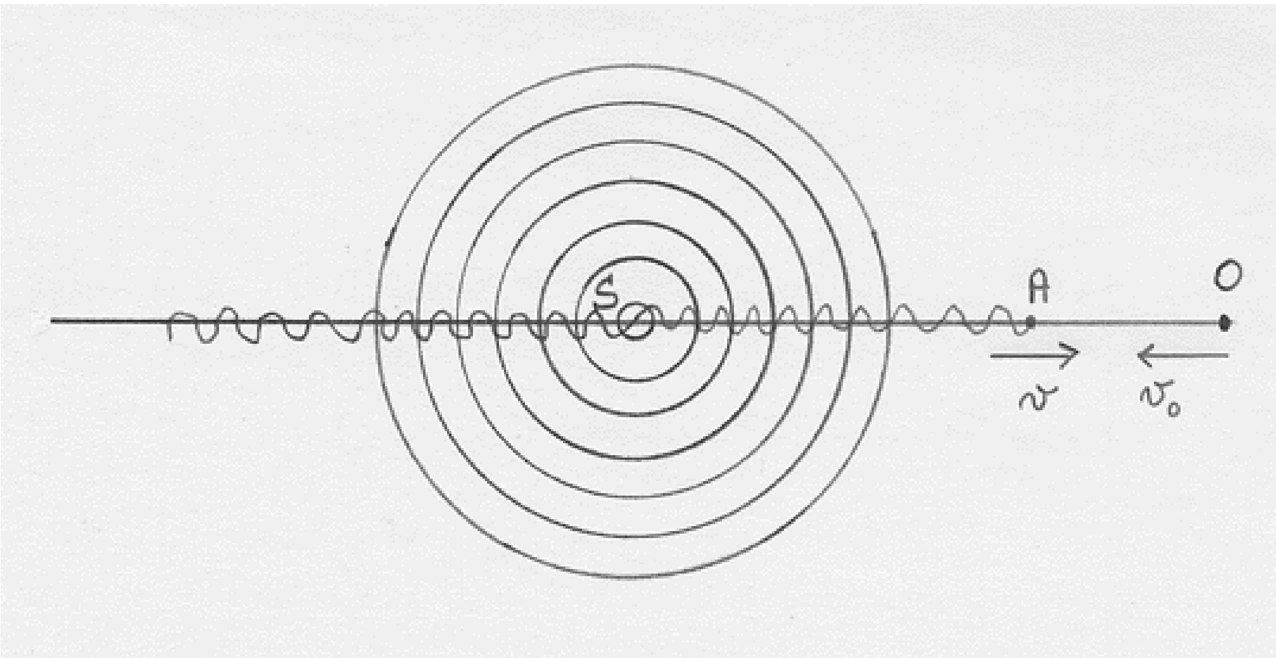

Figura 19

immobile S, si avvicinasse ad O con velocità v + v_0. Di conseguenza la frequenza ν percepita da O sarà:

$$\nu = \frac{v + v_0}{\lambda}$$

e, ricordando che λ = v/ν' dove ν' è la frequenza emessa da S, si ha:

$$\nu = \frac{v + v_0}{\frac{v}{\nu'}} \Rightarrow \nu = \nu'\left(1 + \frac{v_0}{v}\right) \tag{3}$$

Quindi la frequenza ν delle onde percepite da O sarà maggiore della frequenza ν' emessa. Anche qui, nel caso in cui O si allontani da S, basta sostituire, nella relazione trovata, alla quantità v la quantità -v ; si ottiene cosi:

$$\nu = \nu' \cdot \frac{v - v_0}{v} \Rightarrow \nu = \nu' \cdot \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \tag{4}$$

ed in questo caso la frequenza ν delle onde percepite da O risulterà minore della frequenza ν' delle onde emesse da S.

III° CASO

Il caso in cui si muovano sia la sorgente che l'osservatore ci fornisce una relazione che, con le opportune modificazioni, è valida per tutti i casi che possono verificarsi.

Se S ed O si muovono l'una verso l'altra e viceversa con velocità rispettive $\mathbf{v_S}$ e $\mathbf{v_0}$ e se v è sempre la velocità di propagazione delle onde emesse da S, le cose vanno come abbiamo visto nel primo caso poiché, a seguito del principio classico di relatività, è come se O fosse immobile e le onde si avvicinassero ad O con velocità v + v_0 .La seconda delle (1) diventa quindi:

$$\nu = \nu' \cdot \frac{v + v_0}{v - v_S} \Rightarrow \nu = \nu' \cdot \frac{1 + \frac{v_0}{v}}{1 - \frac{v_S}{v}} \tag{5}$$

Nel caso in cui S ed O si muovono ambedue ma, questa volta, allontanandosi, bisognerà sostituire a v la quantità» -v , ottenendo:

$$\nu = \nu' \cdot \frac{v - v_0}{v - v_S} \Rightarrow \nu = \nu' \cdot \frac{1 - \frac{v_0}{v}}{1 - \frac{v_S}{v}} \tag{6}$$

Se invece di considerare la seconda delle (1) consideriamo la prima delle (2), e cioè pensiamo le cose come se S fosse immobile e le onde si avvicinassero ad O con velocità v + v_S, si ha:

$$\nu = \nu' \cdot \frac{v + v_0}{v + v_S} \Rightarrow \nu = \nu' \cdot \frac{1 + \frac{v_0}{v}}{1 + \frac{v_S}{v}} \tag{7}$$

ed in allontanamento :

(8) $$\nu = \nu' \cdot \frac{v - v_0}{v + v_S} \Rightarrow \nu = \nu' \cdot \frac{1 - \frac{v_0}{v}}{1 + \frac{v_S}{v}}$$

Mettendo insieme le (5), (6), (7) e (8) si ottiene la:

(9) $$\nu = \nu' \cdot \frac{v \pm v_0}{v \pm v_S} \Rightarrow \nu = \nu' \cdot \frac{1 \pm \frac{v_0}{v}}{1 \pm \frac{v_S}{v}}$$

e questo è quanto si può ricavare **con considerazioni classiche**. Si può vedere che la (9) riunisce in sé tutte le relazioni viste se si considerano gli opportuni segni del caso, in base alle considerazioni precedenti, e se si pongono uguali a zero le velocità v_S o v_0 che lo risultassero.

Alla fine del paragrafo 22 del capitolo VI è mostrato come la relatività di Einstein permette di estendere quanto ora visto al caso di onde elettromagnetiche e quindi della luce.

Occorre ora fare una osservazione molto importante. A parità di velocità relativa sorgente-osservatore **non** è la stessa cosa che si muova l'uno o l'altro ed i risultati ottenuti dimostrano ciò [si confronti, ad esempio, l'ultima delle (1) con l'ultima delle (3); si confronti poi l'ultime, delle (2) con l'ultima delle (4)]. Nel 1° caso discusso, infatti, l'osservatore O è immobile e rispetto a lui si muove la sorgente ma non il mezzo attraverso cui si propagano le onde. Nel 2° caso discusso, invece, l'osservatore O si muove rispetto ad una sorgente e ad un mezzo che sono ambedue in quiete. I due casi quindi non sono simmetrici.

***

Riprendiamo ora in esame le formule (1) e (3) che fornivano lo spostamento di frequenza Doppler nel caso, rispettivamente, di sorgente in moto verso un osservatore immobile, e di osservatore in moto verso una sorgente immobile:

(1) $$\nu = \nu' \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_S}{v}}$$

(3) $$\nu = \nu' \left(1 + \frac{v_0}{v}\right)$$

Trasformiamo ora la (1) in una, forma che ci permetterà un utile confronto con la (3):

(1) $$\nu = \nu' \left(1 - \frac{v_S}{v}\right)^{-1}$$

Ricordiamo ora la formula che permette lo sviluppo del binomio di Newton:

(10) $$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n+1)}{2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} x^3 + \cdots$$

e applichiamola all'ultima relazione scritta:

$$\nu = \nu'\left[1+(-1)\left(-\frac{v_S}{v}\right)+\frac{(-1)(-2)}{2}\left(-\frac{v_S}{v}\right)^2+\frac{(-1)(-2)(-3)}{6}\left(-\frac{v_S}{v}\right)^3+\cdots\right]\Rightarrow$$

(11)
$$\nu = \nu'\left[1+\frac{v_S}{v}+\left(\frac{v_S}{v}\right)^2+\left(\frac{v_S}{v}\right)^3+\cdots\right]\Rightarrow$$

(12)
$$\nu = \nu'\left[1+\frac{v_S}{v}+\left(\frac{v_S}{v}\right)^2\right]$$

Supponiamo ora che la velocità di spostamento della sorgente (v_S) sia piccola rispetto alla velocità (v) delle onde provenienti da S. Si ha allora che v_S/v è un numero molto piccolo e certamente positivo e minore di 1 (si noti che questo fatto è comunemente verificato quando si osserva l'ffetto Doppler acustico nella vita quotidiana: una sirena dei pompieri che si avvicina, il fischio di un treno in avvicinamento, ... ; in questi casi, supponendo una velocità della sorgente di 120 Km/h $\approx$ 33,2 m/sec ed una velocità del suono di 332 m/sec si ha che v_S/v vale 1/10 e siamo nelle condizioni ipotizzate). Se il termine del primo ordine v_S/v è molto piccolo, a maggior ragione lo sarà il termine del secondo ordine $(v_s/v)^2$ ed ancora di più quello del terzo ordine $(v_S/v)^3$, e così via. Ebbene, potendo trascurare termini d'ordine superiore al primo, la relazione (1), scritta nella forma (11), diventa:

(13)
$$\nu = \nu'\left(1+\frac{v_S}{v}\right)$$

e, come si può vedere, è esattamente uguale alla (3); o, per essere più precisi, differisce dalla (3) per termini d'ordine superiore al primo in v_S/v.

E' chiaro che, potendo applicare il principio classico di relatività, le velocità dell'osservatore v_0 e della sorgente v_S sono intercambiabili, di modo che, indicando con u indifferentemente v_0 e v_S si ha, come conseguenza di quanto abbiamo detto, che;

(13 bis)
$$\left(1+\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{u}{v}\right)}$$

quando si possono trascurare termini d'ordine superiore in u/v. Ebbene la relazione ora vista, nell'ipotesi appena annunciata, è facilmente dimostrabile anche algebricamente:

$$\left(1+\frac{u}{v}\right)\left(1-\frac{u}{v}\right)=1\Rightarrow 1-\left(\frac{u}{v}\right)^2=1$$

e così, solo se $(u/v)^2$ è trascurabile rispetto ad 1, solo allora si può scrivere la (13 bis).

Nel caso poi si consideri la (1), scritta nella forma approssimata (12), si usa dire che la (3) e la. (l2) differiscono per termini del secondo ordine in v_S/v o per termini $(v_S/v)^2$.

Per concludere, nelle situazioni pratiche viste negli esempi fatti, questa, differenza può essere trascurata, e le cose si osservano allo stesso modo sia che la sorgente si avvicini all'osservatore, sia che l'osservatore si avvicini alla sorgente. Ciò vuol dire che vale il principio classico di relatività, ed esso, occorre sottolinearlo, vale quando v_S o v_0 sono piccole rispetto a v.

Ma la differenza, pur se trascurabile, **esiste**. Se siamo in grado di fare misure precise al secondo ordine in v_S/v allora siamo anche in grado di stabilire un moto assoluto rispetto al mezzo che trasporta le onde; siamo cioè in grado di dire se è la sorgente o l'osservatore che si muove, ad esempio, rispetto all'aria considerata immobile. E questo è possibile perché,se nelle nostre misure dovesse comparire solo il termine v_S/v , non troveremmo differenza tra le relazioni (3) e (13) e quindi sarebbe indifferente pensare o l'osservatore o la sorgente in moto; ma se comparissero termini del secondo ordine, allora dovremmo dire che vale la (12) e cioè la (11) ed in definitiva la (1), la quale ci dice che è la sorgente che si muove verso l'osservatore. Lavorando allo stesso livello di precisione, se i termini del secondo ordine non compaiono, possiamo concludere che vale la (3) e quindi che è l'osservatore in moto verso la sorgente.