

# FISICA/ MENTE

## ALCUNE QUESTIONI DI MATEMATICA NELL'ANTICHITA' PRECLASSICA

### PARTE I - EGITTO

**Roberto Renzetti**

#### PREMESSA.

Vi è un accordo comune tra svariati storici sulla difficoltà di ricostruire compiutamente la matematica preellenica, quella di Egiziani, Caldei, Fenici, Babilonesi. Vari documenti vi sono ed altri se ne vanno aggiungendo man mano che le ricerche archeologiche fanno dei passi in avanti. Ma il problema, più che di materiali storici, è della loro interpretazione. La maggior parte dei testi di storia della matematica, liquida in un primo capitolo introduttivo la matematica dei 3000 anni (sic!) prima dell'auge della matematica greca (a partire dal 600 a.C.). Solo alcuni dedicano un capitolo all'Egitto ed uno alla Mesopotamia, trattata come un tutt'uno.

Non voglio in nessun caso fare la storia di questa matematica (sarebbe un sfida molto complessa e non ne sarei in grado) ma solo tentare, in breve, di ricostruire alcuni processi di calcolo seguiti in Egitto (finalizzati principalmente alla misura) ed in Mesopotamia (con caratteri più astratti) al fine di comprendere alcuni meccanismi che hanno aperto certe strade e che oggi, in gran parte, non si utilizzano più. Per farlo occorre partire dalle necessità di uso pratico che si dovevano porre agli antichi.

#### 1 - PERCHÉ SI E' SVILUPPATA LA MATEMATICA

Giancarlo Masini, nella sua gradevole *Storia della Matematica* (SEI, 1997) ci parla dei comportamenti della cornacchia che sa contare. Egli dice che un uccello che abbia deposto quattro uova non si accorge se gliene viene sottratto uno e continua a covare gli altri 3. Ma si accorge se gliene vengono sottratti 2. In tal caso abbandona il nido. Ciò indica che l'uccello sa contare almeno fino a due. Ma la cornacchia, secondo il naturalista John Lubbock, sa contare addirittura fino a quattro, dopodiché fa confusione(1). Questi piccoli aneddoti servono solo per dire che probabilmente l'uomo primitivo aveva gli stessi problemi, quelli di riuscire a contare e mantenere a mente fino ad un certo punto per poi

perdersi. E, quando dico contare, sembra verosimile pensare ad oggetti materiali e quindi a cose presenti (animali, figli, membri della tribù, oggetti di uso ...) e giammai ad entità astratte. Ma c'è di più: sembra proprio che il contare ed il parlare siano state "scoperte" simultanee dell'uomo primitivo. E qui si poneva un problema che è testimoniato da innumerevoli antichi ritrovamenti: esistono simbolismi precisi per l'uno ed il due, poi vi è il riferimento ad una quantità generica definita "*mucchio*" o consimili. E questo *mucchio*, probabilmente era il mucchietto di sassi che si costruiva per contare quantità superiori a quelle che si potevano ritenere a mente. Occorreva costruirsi il concetto astratto di numero insieme al fatto che poi occorreva ritenerlo in qualche modo. Per fare ciò occorsero secoli che noi non siamo in grado di seguire storicamente ma che possiamo intuire osservando la formazione del concetto di numero e quantità nei bambini. Questi ultimi contano bene fino a due, appunto, poi introducono il "tanti" che corrisponde a quel mucchio di sassi. Inoltre sono ancora i bambini a fare qualcosa che risulta naturale. Aiutarsi con le dita per contare, addirittura facendo in un modo che risulta interessante, per ciò che dirò, è tipico dei bambini. Avrete notato che stendono la manina ed iniziano a sollevare il mignolo (e non il pollice), poi l'anulare, eccetera. A volte qualunque sia la quantità, ti mostrano la palma della mano completamente aperta, per poi abbassare con l'altra mano le dita in più. Insomma numeri e contatori devono essersi ben presto associati per originare quelle che oggi noi conosciamo, con parola difficile, basi di numerazione. Probabilmente non ci facciamo più caso ma nella vita quotidiana noi usiamo diverse basi di numerazione: base 10 (per i conti ordinari), base 60 (per gli angoli e per il tempo) (2), base 12 (per le ore e per altre piccole cose restate nell'uso come la dozzina di uova), .... Cerchiamo di ricostruire la possibile nascita di queste basi proprio attraverso le dita delle mani.

La base 10 pare la più evidente perché nasce dalle 10 dita delle due mani. Ma qui doveva nascere un qualche problema se, arrivati a 10, si doveva andare ad 11. Dove lo si manteneva indicato? Sì, perché il problema era anche quello di mantenere memoria del conto che si andava facendo. Diciamo che la base 10 risultava troppo piccola per fare conti con quantità maggiori appunto di 10. Occorreva moltiplicare le dita con un uso adeguato. Vediamo come fare. Consideriamo ad esempio la mano destra ed apriamola considerando il pollice non come un possibile numero ma come contatore. Se spostiamo il pollice successivamente sulle falangi, falangine e falangette del mignolo abbiamo contato fino a 3; ripetendo ciò per l'anulare arriviamo a 6; ripetendolo per le altre due dita arriviamo a 12! Che è un possibile modo di intendere come sia nata quella base. Utilizzando cioè una mano sola contiamo fino a 12, di più che con le dita delle due mani. L'estensione di questo metodo è naturale, con l'introduzione dell'altra mano inizialmente chiusa a pugno. Ogni volta che si è contato 12, si solleva un dito della seconda mano. Quando sono sollevate le cinque dita dell'altra mano si è arrivati a 60. Si è fatto un piccolo miracolo, potenziando al massimo le disponibilità di conto offerteci dalla fisiologia e verosimilmente questo deve essere stato il modo in cui sono andate le cose. Faccio notare che in paesi contadini le persone anziane contano ancora con il sistema ora descritto. E, se usano il sistema decimale, lo fanno contando a partire dal mignolo.

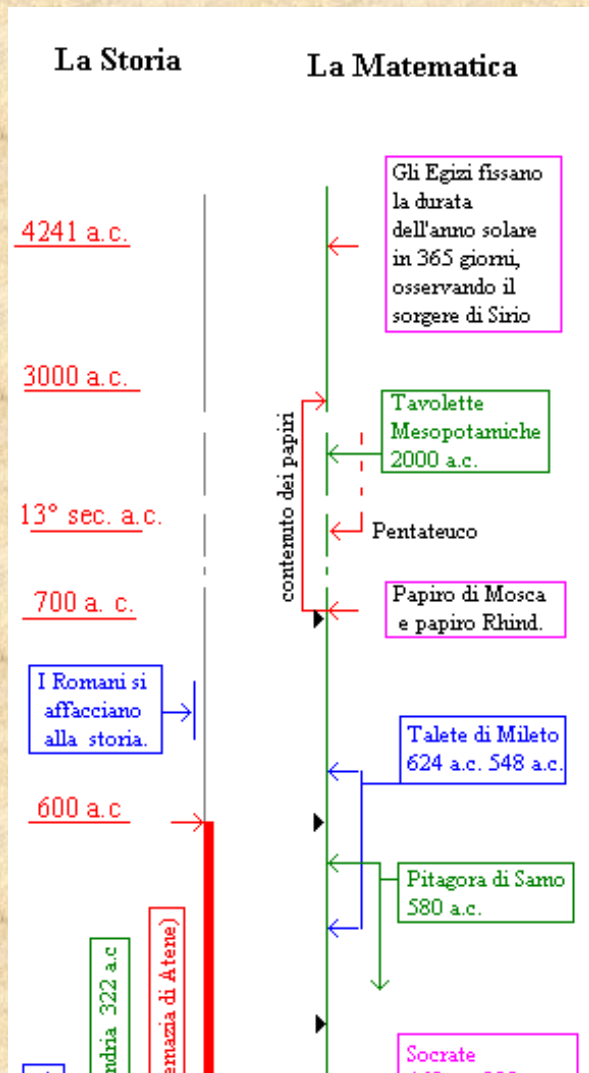
Si possono anche fare delle illazioni di tipo storico. L'uomo primitivo, nomade, alla ricerca del cibo mediante prodotti spontanei della terra, caccia e pesca non deve aver avuto necessità di utilizzare numeri che andassero al di là del 10. Tale necessità deve essersi accresciuta con il passaggio alla sedentarietà, all'agricoltura, all'allevamento. Non mi dilungo ma sembra evidente che un gregge richiede precisi conteggi, allo stesso modo che ceste di grano e/o di sementi. Fino a quando non si iniziarono gli scambi che dovettero prevedere un'accelerazione dei processi aritmetici. Il prevedibile inizio poteva essere: una pecora è contata con una conchiglia, due pecore, due conchiglie, .... ed alla fine si aveva un gregge da una parte ed un mucchietto di conchiglie dall'altra parte e si era realizzato un altro importante concetto di matematica, la corrispondenza biunivoca tra due classi di

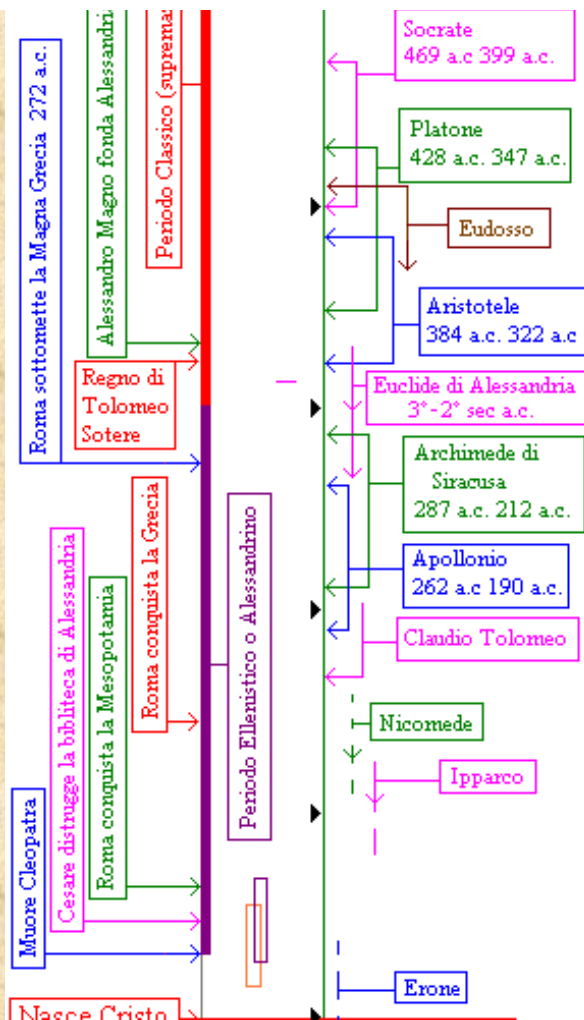
oggetti. E questi sistemi di numerazione possono essere poi evoluti in cordicelle con nodi e nell'abaco.

Più oltre dell'uso delle dita e delle conchiglie si può pensare a delle tacche fatte su dei bastoni, tacche che via via hanno avuto una qualche organizzazione fino ad arrivare alla scrittura ed alla differenziazione dei numeri. E' prevedibile però, prima del numero che è davvero un concetto molto complesso da conseguire, un passaggio attraverso tante aste per avere tante unità. Tutti voi avrete visto i disegni sulle mura di antiche celle: sulle pareti i giorni erano scanditi con quattro aste parallele e con una quinta asta tracciata obliquamente sulle prime quattro. In tal modo ogni blocco era 5 ed il sistema non prevedeva il contare innumerevoli aste ma tanti blocchi di cinque.

Ma vi doveva essere un altro problema. Quello che prevede, anche qui, una grossa astrazione nel passare da due mele, due pecore a due e basta. L'idea dell'esistenza di un numero indipendentemente dagli oggetti indicati. Tracce rupestri trovate mostrano sempre qualche simbolismo che può rappresentare un numero con un oggetto o animale a lato. Quel numero ha un senso solo se legato a cose concrete. E noi non siamo in grado di cogliere questo momento di transizione all'astratto che pure c'è stato, anche se alcuni ritrovamenti archeologici (tavolette sumeriche di circa il 2500 a.C.) ci presentano dei problemi aritmetici svolti da classi di studenti. Ed un problema è già di per sé un'astrazione perché presenta una realtà comunque virtuale.

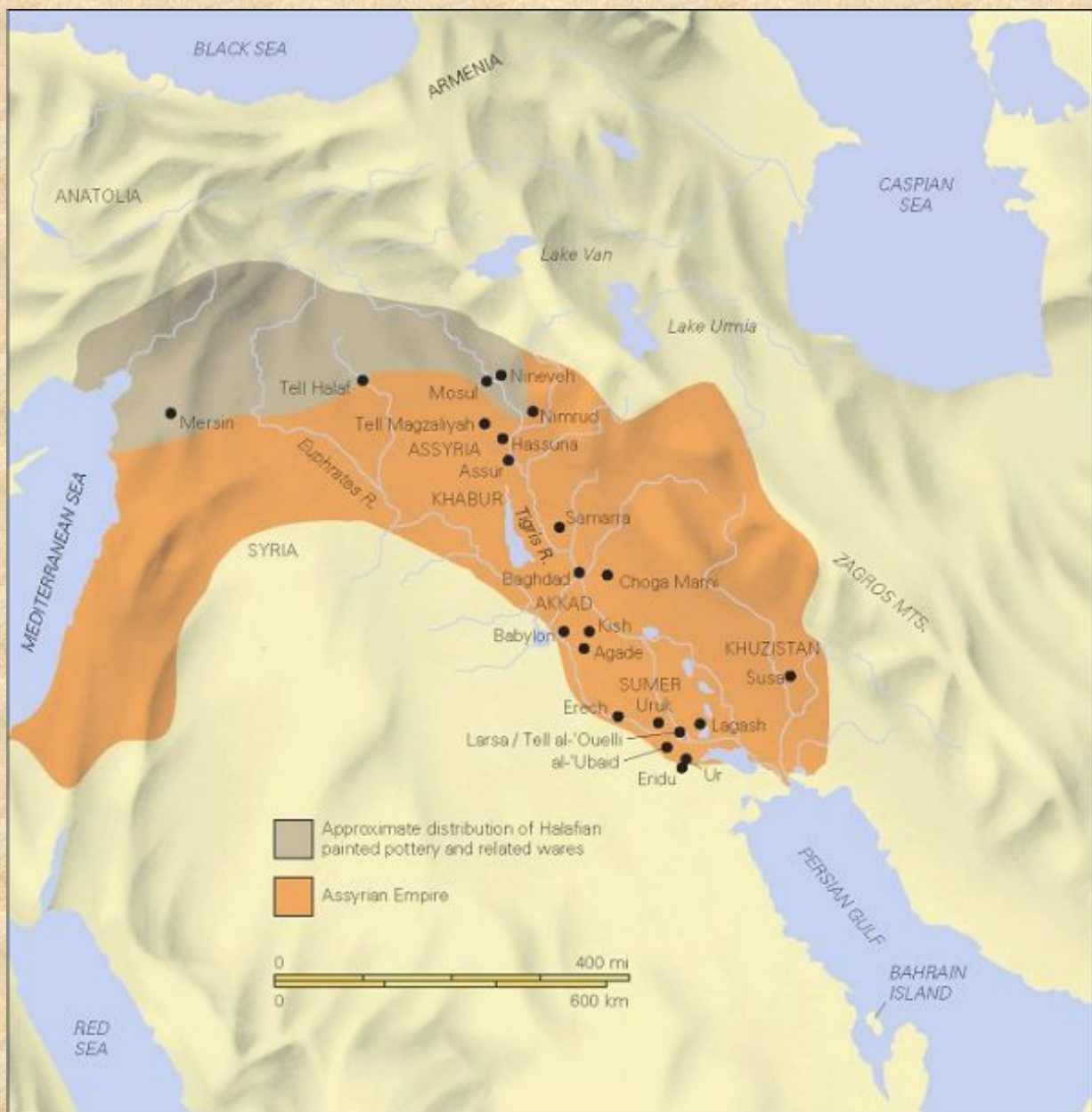
Dobbiamo quindi fare questo passaggio logico. Da una parte ipotizzare ciò che crediamo ragionevole sia stato elaborato dai nostri progenitori in secoli e secoli. Poi rifarci ai documenti storici ed ai ritrovamenti archeologici che ci fanno fare un grande salto verso di noi ed al massimo ci portano a 4000 anni a.C.





Cronologia matematica ([http://www.itsosgadda.it/Fornovo/Didattica/matematica/mosaico\\_ITSOS\\_C/UD\\_05/05\\_01\\_lez.htm](http://www.itsosgadda.it/Fornovo/Didattica/matematica/mosaico_ITSOS_C/UD_05/05_01_lez.htm))

Tralascio la discussione del dove sia nata la matematica, essendo evidente una trasmissione possente di conoscenze, al seguito di commerci, tra Oriente e Medio Oriente. Sembra ormai accertato che lo sviluppo della nostra matematica sia avvenuto essenzialmente in quella terra felice che si trovava tra i fiumi Tigri ed Eufrate (in gran parte l'attuale Iraq), la Mesopotamia, abitata successivamente dai sumeri, la più grande civiltà del passato, dai babilonesi, dai caldei e dagli assiri (che inclusero altri territori, tra cui la Palestina, la Fenicia e la Siria, fino alle soglie dell'Egitto) (3).



L'impero assiro ( <http://www.erin.utoronto.ca/~w3env100/env/ENV100/hum/map.htm> )

## 1-1 - L'EGITTO E LA MESOPOTAMIA

La matematica che oggi conosciamo, e tutti concordano con quanto dirò, nasce in Grecia intorno al 600 a.C. E' un insieme di fattori, non ultimi quelli economici di un benessere superiore raggiunto, che permette i tempi di una riflessione su questioni non immediatamente applicative. Permette cioè che sia possibile per una società mantenere alcune persone che, come mestiere, elaborano il pensiero. E la matematica non si sviluppa come ramo a sé, come entità separata dal progresso delle elaborazioni letterarie, filosofiche, architettoniche, ... E' un ramo del più generale sapere che cresce insieme e proprio a cominciare da quell'epoca.

Ciò non vuol dire, nel modo più assoluto, che prima vi fosse il deserto. Vi erano state anzi delle civiltà evolutissime che avevano elaborato molto, per quanto ci è dato sapere, nel pensiero pratico, applicativo. Due tra di esse emergono con prepotenza: quella egizia e quella mesopotamica (in tutte le sue varie successive denominazioni). La prima fondata essenzialmente sulla potenza che gli derivava da eserciti di schiavi e la seconda dalle ricchezze che derivavano da fiorenti commerci. E' da queste due civiltà che abbiamo

ricevuto le prime e molto incomplete documentazioni scritte su un arco di tempo che copre ben oltre due millenni a.C.

E, proprio per quando dicevo poco fa, questa documentazione può nascere in quanto, ad un certo momento nacque la necessità di disporre di un calendario e di osservare quindi il cielo, sede di moti periodici regolari a cui riferirsi. I passi furono lunghissimi e sono quelli che ci portano dagli uomini primitivi a quelli riconoscibili in civiltà. L'aggregazione di uomini in una cultura, comporta imprese collettive che, ai primordi, potevano essere centrate intorno ad un tempio ed alla conservazione delle memorie, dei testi, delle scoperte. Abbiamo tracce della prima misura del tempo per registrare l'avanzare dell'anno solare, documentata con tacche su bastoni, nell'Egitto intorno al 4240 a.C. E sembra che tale abilità si avesse già in Mesopotamia intorno al 5700 a.C. Di per certo, intorno al 3000 a.C. ambedue le civiltà avevano città che ruotavano intorno ad un tempio che stabilisce una credenza metafisica codificata da una casta di sacerdoti depositari del sapere, della cultura e della conservazione dei documenti. A questo proposito c'è da osservare che i sacerdoti furono i primi matematici e questa eventualità è alla base della tradizione secolare che vede il matematico come conoscitore di cose sovrumane, di colui che mette insieme figure e *magia dei numeri*, ... Questo mito sopravvisse fin oltre il Rinascimento ed ebbe grande influenza sullo sviluppo della scienza. Un dato linguistico molto significativo è che la parola *akkadiana* (utilizzata nella regione di Accad nel paese sumero) usata nel significato di *eseguire una somma* era identica a quella usata nel significato di *compiere un atto rituale*. Ritornando al tema, si può dire che nel 2000 a.C. le due civiltà avessero già raggiunto livelli culturali molto sofisticati come mostrano molti documenti ritrovati. Di questa epoca sono i principali documenti sulle conoscenze matematiche in quelle civiltà di cui disponiamo. A questo punto sorge il problema di capire cosa sia accaduto dal circa il 2000 a.C. fino a circa il 600 a.C. Non è plausibile pensare che la matematica si sia bloccata a quest'epoca per ben 1500 anni fino alla sua possente evoluzione in Grecia. Credo che manchiamo di molti documenti e che la storia che possiamo fare è profondamente lacunosa dovendo noi marciare a tentoni nel buio delle informazioni documentali. Secondo alcune dichiarazioni attribuite a Democrito, Talete, uno dei primi e più grandi matematici dell'antichità classica, avrebbe appreso la matematica viaggiando in Egitto.

Ma anche così stando le cose, certamente le conoscenze che discuteremo furono potenti fondamenta allo sviluppo teorico dell'architettura della matematica ellenica.

## 1.2 - L'EGITTO

L'Egitto, contrariamente alla Mesopotamia che risulta più aperta e più frammentata sia economicamente che politicamente, era un regno chiuso, estendentesi per 1000 Km, gli ultimi su 6000, lungo il fiume Nilo, circondato da deserti. Dopo le prime guerre e lotte intestine, l'Egitto risulterà formato da due regni, l'alto Egitto (una vallata di pochi chilometri di larghezza e lunga 800 km che va dalla Nubia all'inizio del delta del Nilo) con un clima torrido e secco ed il basso Egitto (l'intero delta del Nilo, un triangolo di 250 km di base sul Mediterraneo e 150 km di altezza verso l'interno) molto fertile e con un clima temperato.



da: [www.circolomaniago.it/circolo\\_maniago\\_i000116.jpg](http://www.circolomaniago.it/circolo_maniago_i000116.jpg)

Le attività fondamentali erano l'agricoltura, l'allevamento di vari tipi di bestiame e l'artigianato (ceramica, legno di palma, papiro, rame, bronzo, filatura e tessitura del lino, mentre in Mesopotamia era della lana).

## 2 - MATEMATICA EGIZIA

Per le conoscenze che abbiamo la matematica sumera (che usava il sistema sessagesimale) è la matematica più avanzata dell'antichità, addirittura più avanzata per la sua raffinatezza di quella egizia (che usava generalmente il sistema decimale privo di zero ma con, a volte, sottomultipli in sistemi settuagesimali o con, altre volte, multipli e sottomultipli espressi in frazioni). Proprio dai ritrovamenti archeologici risalenti addirittura a 4 millenni a.C. (sia per sumeri che per egizi), scopriamo che tra i primi sistemi di scrittura che incontriamo la parola ed il numero si presentano simultaneamente. Ambedue le civiltà partivano dallo studio di problemi pratici per l'elaborazione della loro matematica.

In Egitto si iniziò a sviluppare una *geometria*, quella scienza che etimologicamente significa "misura della terra" proprio per le esigenze pratiche di misure catastali. E' Erodoto (484-408? a.C.) che ci narra un aneddoto in proposito (che è versione diversa da quella di altri storici, come Erone, Strabone, Proclo, ...). Il faraone Sesostri I, della XII dinastia (secondo millennio a. C.), aveva diviso la terra d'Egitto fra i cittadini in tante porzioni rettangolari uguali. Per tali terre ogni anno riscuoteva le imposte corrispondenti. Ma le inondazioni a volte danneggiavano alcune proprietà ed il faraone inviava i suoi ispettori per misurare la porzione di terra danneggiata, di modo che quel cittadino potesse pagare meno tasse. Alcune tra le altre versioni parlano di tasse variabili a seconda del terreno inondato e quindi reso più fertile. La scoperta dei *nilometri* - misuratori dei livelli di inondazione del

Nilo - mostrerebbe che a maggiore crescita del fiume corrispondeva una maggiore porzione di terra inondata e quindi tasse più elevate. Altre versioni ancora parlano di inondazioni che cancellavano materialmente i limiti di proprietà che dovevano essere ricostituiti alla fine di esse.

Qualunque sia la versione corretta, si pone sempre un problema di misura di terra, un problema di *geometria*.

Abbiamo due documenti di estrema importanza sulla matematica egizia il primo dei quali, scoperto nel 1858, è il *papiro Rhind* (dal nome dell'antiquario scozzese che lo acquistò a Luxor), conosciuto anche come *papiro Ahmes dal nome dello scriba* (alto 33 cm e lungo 5,46 m), databile 1650 a.C., copia di altro papiro scritto tra il 2000 a.C. ed il 1800 a.C. e contenente 87 problemi matematici (4) sulle quattro operazioni, sulle aree, sui volumi, ed altro, con particolare riguardo al problema delle parti decimali (le frazioni). I problemi applicano meccanicamente alcune regole che non vengono spiegate. Sono quelle, si applicano e basta. Ciò non vuol dire che da qualche parte gli egiziani non avessero sviluppato una qualche teoria. Ma essa non ci è pervenuta. E' importante notare che questi papiri non sono in carattere geroglifico ma in carattere *ieratico*<sup>(10)</sup>.



**Papiro Rhind, problemi 49-55 su triangoli, rettangoli, trapezi e cerchi (British Museum, Londra)**



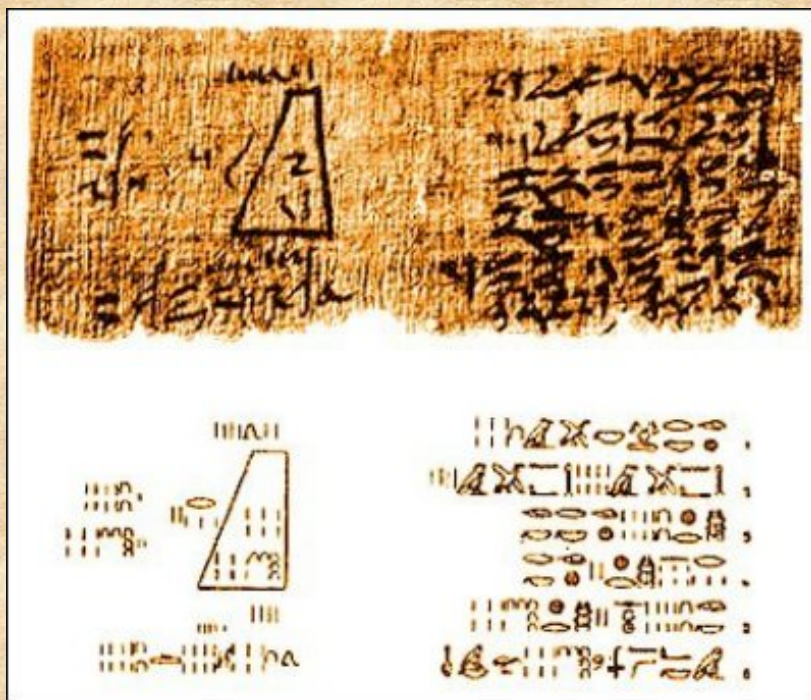


Papiro Rhind, problemi 56-60 sulle piramidi (British Museum, Londra).

Più in dettaglio vediamo di cosa si occupano i vari problemi del papiro, che sembrano degli esercizi pratici che i ragazzi dovevano risolvere, utilizzando la tavola che segue:

<b>Problemi</b>	<b>Descrizione</b>
1 - 6	Come dividere 1,2,6,7,8 y 9 barre di pane tra 10 uomini
7 - 20	Moltiplicazione di frazioni
21 - 23	Sottrazione
24 - 29	Equazioni risolte mediante la <i>regula falsi</i> <sup>(5)</sup> (24 a 27) e ricerca di numeri (28 e 29)
30 - 34	Equazioni lineari più complesse, risolte mediante divisioni.
35 - 38	Equazioni lineari più complesse, risolte mediante la regola della falsa posizione
39 - 40	Progressioni aritmetiche
41 - 46	Volumi
47	Tavola di frazioni di 1 <i>heqat</i> <sup>(6)</sup> in frazioni dell'occhio di Horus <sup>(7)</sup>
48 - 55	Area di triangoli, rettangoli, trapezi e cerchi
56 - 60	Pendenza, altezza e basi di piramidi
60 - 61B	Tavola di una regola per trovare i 2/3 di numeri dispari e frazioni unitarie
62	Peso di metalli preziosi
63	Suddivisioni proporzionali
64	Progressioni aritmetiche
65	Suddivisioni proporzionali di grano tra gruppi di uomini
69 - 78	Scambi, proporzioni inverse, calcoli di <i>pesu</i> <sup>(8)</sup>
79	Progressioni geometriche mediante un indovinello
80 - 81	Tavole di frazioni occhio di Horus di grano in termini di <i>henu</i> <sup>(9)</sup>
82 - 84	Problemi, poco chiari, sulla quantità di cibo per oche, uccelli e buoi
85	Scritto poco comprensibile anche perché è l'unico scritto alla rovescia
86 - 87	Frammenti di conti, in gran parte incompleti.

Insieme al papiro Rhind ve ne è un altro, anch'esso di interesse, il *papiro di Mosca* (alto 7,5 cm e lungo 5,5 m), comprato nel 1883 dal russo Goleniscev e risalente a circa il 1890 a.C., contiene 25 problemi, molti dei quali incomprensibili per i danni al papiro medesimo. Anche qui, fornisco in una tabella il contenuto dei



**Papiro di Mosca (parte relativa al problema 14: calcolo del volume di un tronco di piramide) nell'originale, scritto in ieratico <sup>(10)</sup> con, in basso, la sua traduzione in geroglifico (Museo delle Belle Arti, Mosca)**

problemi trattati nel papiro, osservando che anch'esso è in ieratico e non in geroglifico:

<b>Problemi</b>	<b>Descrizione</b>
1-2	Incomprensibili
3	Altezza di una trave di legno
4	Area de un triangolo
5	<i>Pesu</i> <sup>(8)</sup> di filoni di pane
6	Area del rettangolo
7	Area di un triangolo
8-9	<i>Pesu</i> di filoni di pane
10	Area di una superficie curva a forma di cesto
11	Poco chiaro, tratta di pani e cesti
12	<i>Pesu</i> di birra
13	<i>Pesu</i> di pane e birra
14	Volume di un tronco di piramide
15-16	<i>Pesu</i> di birra
17	Area del triangolo
18	Misure in <i>palmi</i> e <i>braccia</i> <sup>(11)</sup>

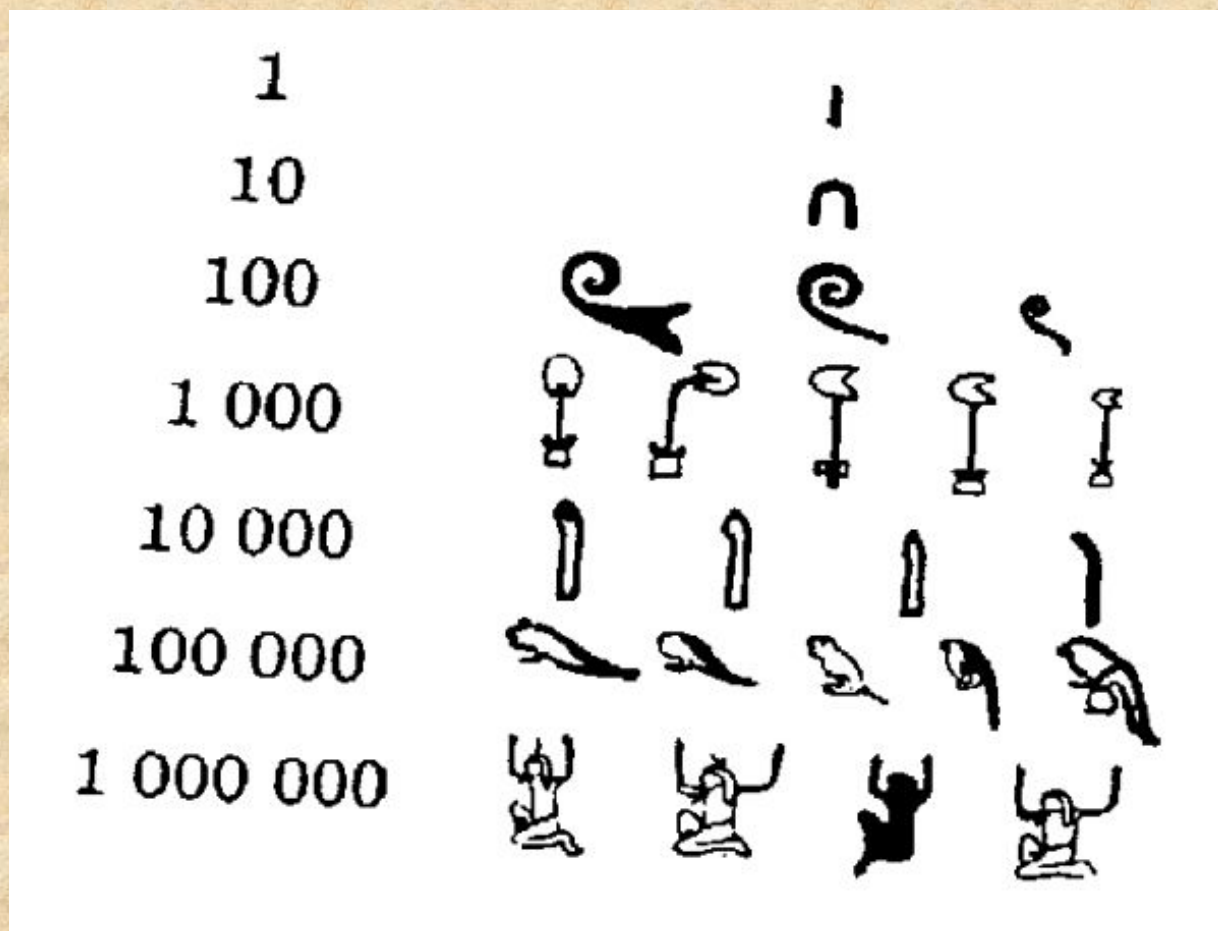
19	Equazione lineare (1° grado)
20	Frazioni di Horus
21	Regola (oscura) per calcolare la mescola per il pane sacrificale (12)
22	Pesu di pane e birra
23	Calcolo del lavoro di un calzolaio (poco chiaro)
24	Scambi
25	Equazione $2x + x = 9$

Tra questi problemi solo due sono d'interesse, il 10, dove si calcola l'area di una superficie che sembrerebbe (la figura non è chiara) un cesto o una semisfera, ed il 14 (quello di figura), dove si calcola il volume di un tronco di piramide.

### 3 - QUESTIONI ARITMETICHE NEL PAPIRO RHIND

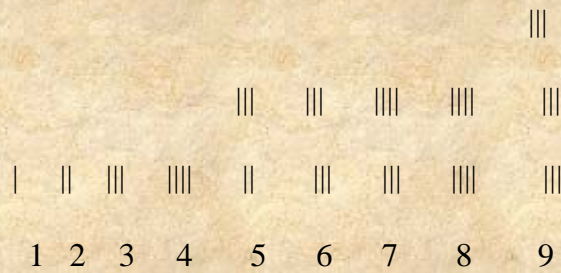
#### 3.1 - LE FRAZIONI

Vedremo ora più in dettaglio qualcuno dei problemi trattati nel papiro Rhind, iniziando da quelli di tipo aritmetico. Prima è però utile fornire il modo egizio di scrittura delle cifre (il modo popolare, quello geroglifico). Come si vede l'uno è rappresentato da una asticella e vi sono poi simboli speciali per indicare i vari

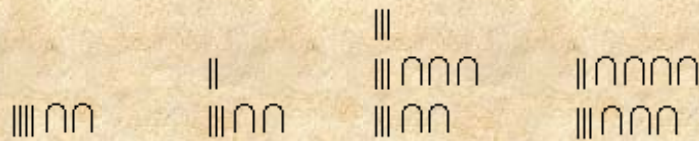


multipli del sistema decimale. Per scrivere numeri intermedi si dovevano combinare quelli ora visti, con l'avvertenza che il numero che si voleva era scritto da destra a sinistra. Da uno

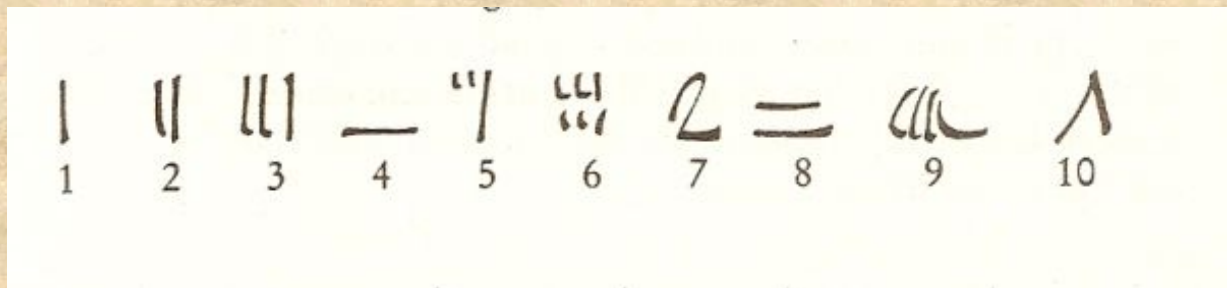
a nove si usavano solo asticelle, nel modo seguente:



Si può capire che solo quattro sono i simboli posti di seguito. Passando ad un numero superiore si dispongono i simboli prima su due righe poi su tre. Con quanto detto, si possono capire i numeri seguenti, il 24, il 25, il 59, il 75:



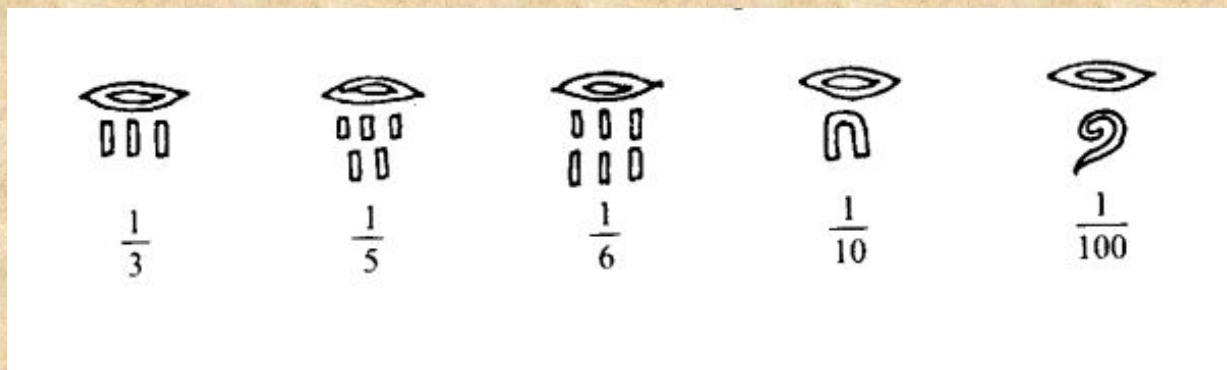
E queste, erano le cifre geroglifiche, vediamo ora quelle ieratiche che sono di maggiore interesse per gli sviluppi posteriori poiché molto più semplici e pronte per poter scrivere numeri diversi modificando la posizione della cifra:



Per confronto, presento anche il modo di scrivere le stesse cifre in differenti civiltà antiche:


EGIZIANI											∩
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
BABILONESI	∩	∩∩	∩∩∩	∩∩∩∩	∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩	∩∩∩∩∩	<
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
CINESI	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
MAYA	●	●●	●●●	●●●●	—	●	●●	●●●	●●●●	—	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
ARABI	.	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	
	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
INDIANI		∑	∑	Δ	Δ	Δ	7	8	9	0	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	

Vediamo infine il modo di rappresentare le frazioni in Egitto osservando che quella specie di doppia ellisse, che spesso è anche una sola o anche solo un punto, che è al di sopra di ciascuna frazione (chiamata *ro*) rappresenta l'unità che sembra una schematizzazione dell'occhio di Horus, sotto il quale vi sono le cifre geroglifiche viste::



Nella scrittura ieratica, le cose vanno allo stesso modo, sostituendo la doppia ellissi con un punto e mettendo sotto di esso cifre ieratiche (nella scrittura geroglifica vi sono alcune eccezioni per la scrittura di  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $1/4$ ,  $3/4$  che rispettivamente si rappresentavano nel modo seguente:



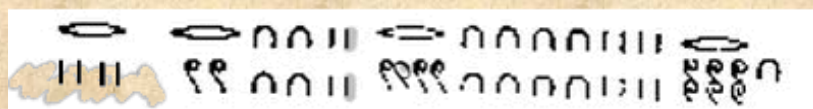
mentre nella scrittura ieratica vi è la sola eccezione  $2/3$ , rappresentata con . C'è solo da osservare che le frazioni erano ordinali e non cardinali. La frazione  $1/3$ , ad esempio, era "parte 3".

Fin qui per le frazioni che hanno 1 al numeratore (a parte qualcuna diversa, accennata). Quando si aveva un numero diverso da 1 al numeratore, si trattava di ridurre quest'ultima frazione a somma delle prime (ma con addendi MAI uguali). Per scrivere, ad esempio,  $2/5$  non si usava  $1/5 + 1/5$  ma  $1/3 + 1/15$  (e non si usava neppure il segno  $+$  e le frazioni da sommare si scrivevano l'una dietro l'altra). Senza una regola generale, che non risulta gli egiziani avessero (compaiono solo soluzioni a casi particolari e regole di calcolo per calcoli già impostati), risultava molto complesso la semplice addizione tra frazioni e quindi disporre di frazioni con numeratore diverso da 1. Troviamo così nel papiro Rhind delle tabelle con i calcoli che servivano già fatti. Di seguito riporto la tavola che fornisce le frazioni con numeratore 2 e con denominatore tutti i numeri dispari dal 5 al 101. Per avere  $2/5$ , ad esempio e come già detto, si deve sommare  $1/3 + 1/15$ ; per ottenere invece  $2/29$ , occorre sommare  $1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232$ ; ...

<b>Numeratore 2</b>	<b>Denominatori di frazioni a numeratore uno da sommare</b>	<b>Numeratore 2</b>	<b>Denominatori di frazioni a numeratore uno da sommare</b>
<b>Denominatore n</b>		<b>Denominatore n</b>	
5	3,15	53	30,318,795
7	4,28	55	30,330
9	6,18	57	38,114
11	6,66	59	36,236,531
13	8,52,104	61	4,244,488,610
15	10,30	63	42,126
17	12,51,68	65	39,195
19	12,76,114	67	40,335,536
21	14,42	69	46,138
23	12,276	71	40,568,710

25	15,75	73	60,219,292,365
27	18,54	75	50,150
29	24,58,174,232	77	44,308
31	20,124,155	79	60,237,316,790
33	22,66	81	54,162
35	30,42	83	60,332,415,498
37	24,111,296	85	51,255
39	26,78	87	58,174
41	24,246,328	89	60,356,534,890
43	42,86,129,301	91	70,130
45	30,90	93	62,186
47	30,141,470	95	60,380,570
49	28,196	97	56,679,776
51	34,102	99	66,198
		101	101,202,303,606

Vediamo ad esempio la rappresentazione geroglifica di  $2/61 = 1/4 + 1/244 + 1/488 + 1/610$



1/4

1/244

1/488

1/610

che è appunto la somma delle quattro frazioni precedenti. Era tutto empirico ? Difficile crederlo. Più probabile, pur senza alcuna prova, che questo fosse il metodo per insegnare ai giovani o il metodo per tabulare alcuni risultati, un poco come la nostra tabellina del moltiplicare.

E se il numeratore è superiore a 2 ?

Nel papiro Rhind l'operazione è sempre quella di riduzione di tali frazioni a somma di frazioni con numeratore 1 e numeratore 2. E, come si può capire, tale modo di operare è sempre più complesso e non mi soffermerò su di esso. Tale complessità è però alla base del mancato sviluppo in Egitto di una aritmetica e di un'algebra avanzate. Cosa che in parte accadde in Mesopotamia dove, contrariamente all'Egitto, si riuscì perfino a cogliere la natura dei numeri irrazionali.

Prima di concludere questo paragrafo è utile un cenno alla grande padronanza delle frazioni che vi era in Egitto. Essa deriva dal sistema economico e sociale dell'Egitto. Poiché la moneta venne introdotta molto tardi e le terre erano tutte di proprietà del faraone o dei sacerdoti, ogni scambio o suddivisione doveva far ricorso alle frazioni. E' anche per questo che, poiché in Egitto si aveva anche scambio di alimenti, si teneva conto del potere nutritivo di essi, a partire dalla materia prima con cui erano fatti (poiché con una unità di grano si possono fare o 80 o 100 pani, questi 80 e 100 si equivarranno). Allo stesso modo le differenze molto marcate di rango, portarono alle proporzioni che ebbero anch'esse un notevole sviluppo in Egitto.

### 3.2 - LE 4 OPERAZIONI

In linea di massima ogni operazione era ridotta ad una addizione, come del resto abbiamo visto per le divisioni rappresentate dalle frazioni.

Vediamo una semplice **addizione** come si svolge. Vogliamo fare  $27 + 14$ :

$$\begin{array}{c} \text{|||} \\ \text{||| } \cap \cap + \text{||| } \cap = \cap \cap \cap \text{|||} \text{|||} \text{|||} \text{|||} = \cap \cap \cap \cap \end{array}$$

$$27 + 14 = \quad = 41$$

A parte i simboli + ed = che non esistevano e da me aggiunti per comodità di lettura, c'è da osservare che il risultato è dato dalla messa insieme dei simboli che rappresentano gli addendi. Nel nostro caso, poiché si avrebbe a che fare con undici unità |, semplicemente a 10 unità | si sostituisce il suo simbolo  $\cap$ . A volte, per indicare che si procedeva a fare una addizione si utilizzava un simbolo che voleva significare una persona in avvicinamento



e che per la sottrazione diventava persona in allontanamento



Per la **sottrazione**, si tolgono i simboli del sottraendo. Se vogliamo realizzare  $27 - 14$ , si ha, senza ulteriori spiegazioni:

$$\begin{array}{c} \text{|||} \\ \text{||| } \cap \cap - \text{||| } \cap = \text{||| } \cap \end{array}$$

La moltiplicazione egizia si basa su una proprietà, probabilmente scoperta dagli egizi da qualche parte ma a noi non pervenuta, quella secondo cui qualunque numero naturale può essere espresso come somma di potenze di 2. In pratica, per moltiplicare si operavano successivi raddoppi o duplicazioni. Vediamo come si procede a voler moltiplicare  $n \times m$ .

Si deve scrivere una tavola di 2 colonne ed  $n$  file. Ogni fila è ottenuta duplicando la precedente e quindi, per moltiplicare  $n \times m$ , la prima fila avrà in una colonna 1 e nell'altra  $m$ ; la seconda fila in una colonna 2 e nell'altra  $2.m$ ; la terza fila in una colonna 4 e nell'altra  $2.2.m$ ; la quarta fila in una colonna 8 e nell'altra  $2.2.2.m$ ; e così via:

1	$m$
2	$m_1 = 2.m$
4	$m_2 = 2.m^1 = 4.m$
8	$m_3 = 2.m^2 = 8.m$
...	.....
$2^k$ (con $2^k < m$ )	$m_k = 2.m^{(k-1)} = \dots$

Il risultato dell'operazione  $n \times m$  è piuttosto complesso ed è preferibile vederlo con un esempio numerico. Proviamo a moltiplicare  $41 \times 59$  come nel papiro Rhind.

1	59
2	118
4	236
8	472
16	944
32	1888

Abbiamo costruito la tavola e, nella prima colonna, ci siamo fermati a 32 (cioè a 2 elevato alla quinta); se avessimo proseguito avremmo avuto 64. Abbiamo questa regola: occorre fermarsi al primo numero che è immediatamente più piccolo del moltiplicatore che, nel nostro caso, è  $59 < 64$ .

Si opera ora una sottrazione che permette di ottenere il moltiplicando 41 come somma del minor numero di addendi della colonna 1. Per farlo si toglie al 41 l'ultimo numero, 32, della colonna e si ottiene 9. A questo punto a 9 occorre sottrarre il numero maggiore possibile ancora della colonna 1, cioè 8. In tal modo si ottiene 1. A questo numero occorre sottrarre il massimo numero possibile ancora della colonna 1. E' solo 1 che fa annullare il tutto. Quando si arriva a questo punto abbiamo fatto e si ricapitola così:

$$41 - 32 = 9; 9 - 8 = 1; 1 - 1 = 0$$

Ciò vuol dire che il numero 41 è dato dall'ultimo numero della colonna 1, cioè 32, a cui occorre sommare i due numeri, ancora della colonna 1, trovati (cioè 8 ed 1):

$$41 = 32 + 8 + 1$$

Ed allora il prodotto cercato è la somma dei numeri delle caselle della seconda colonna corrispondenti ai numeri che costituiscono il 41:

$$41 \times 59 = 1888 + 472 + 59 = 2419$$

che è il risultato che anche noi avremmo trovato, anche se, possiamo concordare, in modo molto più semplice.

In questo metodo si può semplificare l'operazione scegliendo come moltiplicando il più piccolo dei due fattori; in tal modo si riduce il numero delle potenze di 2 e quindi delle operazioni da fare.


Se la moltiplicazione si doveva fare per 10, 100, 1000, ... e così via, vi era il metodo semplice, dello spostamento di tutti i simboli una, due, tre, ... posizioni come mostrato di seguito.

Nella prima riga vi è la sequenza dei simboli 1, 10, 100, 1000, ....



Se moltiplichiamo  $1 \times 10$ , abbiamo 10, passiamo cioè da | a  $\curvearrowright$  e ci spostiamo di una



posizione nella sequenza. Se dobbiamo moltiplicare 1 x 100, abbiamo 100 e ciò vuol dire che nella sequenza dobbiamo spostarci di due posti, ottenendo . Detto questo è semplice fare una moltiplicazione. Riporto un esempio (avvertendo che quei simboli x ed = non erano in uso in Egitto):

$$\begin{array}{ccccccc} | & \cap & \cap & \times & \cap & = & \cap & \text{p} & \text{p} \\ 21 & & & \times & 10 & = & & & 210 \end{array}$$

Per ciò che riguarda la divisione occorre invertire il procedimento di duplicazione e si raddoppia successivamente il divisore invece del moltiplicando. Le divisioni risultavano così approssimate perché il loro risultato era sempre una cifra intera o una frazione esatta. La domanda che veniva fatta nel papiro quando si doveva operare una divisione del tipo A/B era: fare calcoli con B in modo da ottenere A e ciò vuol dire che chi voleva, ad esempio, dividere 696 per 29, ragionava nel modo seguente. Partendo da 29, quante volte dovrei aggiungere questo numero a se stesso per ottenere 696 ? E vediamo come operava. Si costruiscono le due colonne viste per la moltiplicazione:

1	29
2	58
4	116
8	232
16	464

Nella prima colonna ci si ferma al 16 perché il raddoppiamento successivo ci avrebbe portato oltre il divisore 29. Osservando la colonna dei numeri di destra, con conti mentali si trova che la somma di 232 e 464 fornisce l'esatto valore del dividendo 696. Facendo a sinistra la somma dei numero corrispondenti a questi due della colonna di destra, si ottiene la risposta: 8 + 16 = 24. E quando nessuna somma dei numeri della colonna di destra dava il dividendo, allora si introducevano le frazioni come nel **problema 25** del papiro Rhind. Si vuole dividere 16 per 3. Costruiamoci le due colonne (la cui comprensione completa verrà dopo che avrò detto qualcosa):

1	3
2	6
4	12
2/3	2
1/3	1

Sulla colonna di destra, 12 più 3 fa 15 e manca 1 per arrivare al dividendo 16. Manca quindi da dividere 1 per 3. Si deve allora procedere facendo i 2/3 di 1 e dimezzando il risultato (era questa la prassi per fare 1/3 di 1: prima si facevano i 2/3 poi si dimezzava; a noi la penultima riga, il doppio dell'ultima, può sembrare inutile). Ora sulla colonna di destra abbiamo tre numeri che sommati danno il dividendo: 3 + 12 + 1 = 16. La somma delle cifre corrispondenti nella colonna di sinistra fornisce il risultato: 1 + 4 + 1/3 = 5/3.

Nel papiro Rhind è anche trattata l'aritmetica delle frazioni che io tralascio.

Così come tralascio i problemi aritmetici che consistono, principalmente nella ripartizione di pagnotte di pane tra varie persone.

Se si paragona questa all'aritmetica mesopotamica, troviamo che questa è povera e che in particolare in essa manca quella che si potrebbe chiamare la mistica dei numeri, invece presente in Mesopotamia. Tale assenza di mistica, oltre alla difficoltà di scrittura dei numeri senza sistema posizionale, potrebbe aver impedito l'indagine sulle proprietà dei numeri al di là delle loro valenze pratiche.

### 3.3 - RISOLUZIONE DI PROBLEMI ALGEBRICI

I problemi algebrici sono di interesse perché si tratta di capire come gli egiziani risolvevano quelle che noi oggi chiamiamo equazioni.

Occorre subito dire che le nostre notazioni non esistevano. E tantomeno esisteva una differenziazione tra aritmetica ed algebra. Tutto rientrava nelle stesse abilità pratiche di calcolare un qualcosa che nasceva da un problema particolare. Quella cosa da cercare, che noi indichiamo con  $x$ , era chiamata in Egitto *aha* e si indicava con il simbolo seguente:



che vuol dire *mucchio*. Il metodo usato è quello della falsa posizione <sup>(5)</sup> :

Il **problema 24** del papiro Rhind dice: "Una quantità ed un settimo della stessa dà un totale di 19. Qual è questa quantità ?"

Ciò, per noi, corrisponde all'equazione:  $x + 1/7 \cdot x = 19$

Nel papiro, usando il "metodo di falsa posizione"; si attribuisce, cioè, alla *aha* (la nostra  $x$ ) il valore 7 (per evidenti ragioni di semplicità). Con ciò si trova

$$7 + 1/7 \cdot 7 = 8$$

Si confronta ora 8 con il risultato atteso 19, per trovare quel numero  $N$  che, moltiplicato per 8, ci fornisca il 19. Si deve cioè dividere 19 per 8 per ottenere  $N$ . Così che in definitiva abbiamo che il valore cercato sarà  $7 \cdot N$  ovvero:  $7 \cdot 19/8$ .

Procediamo con il dividere 19 per 8 (è un esempio di divisione che valga come esempio che non ho fatto quando ho discusso delle 4 operazioni):

1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1

$$16 + 2 + 1 = 19$$

da cui:

$$19/8 = 2 + 1/4 + 1/8.$$

Questo è il numero  $N$  che dobbiamo moltiplicare per 7 per ottenere la *aha* cercata.

1	$2 + \frac{1}{4}$ $+ \frac{1}{8}$
2	$4 + \frac{1}{2}$ $+ \frac{1}{4}$
4	$9 + \frac{1}{2}$

La **aha** cercata vale quindi:

$$2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 9 + \frac{1}{2} = \mathbf{16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}}$$

Il **problema 26** dice: "*Una quantità ed un suo quarto danno 15. Calcola la quantità*".

E' la nostra equazione:  $x + \frac{1}{4}x = 15$ .

Nel papiro leggiamo: "Prendi il 4 ed allora si ottiene un quarto di esso in 1, in totale 5".

Si sta assegnando all'**aha** un valore 4, anche qui il più semplice per eliminare la frazione, e trovare  $4 + \frac{1}{4} \cdot 4 = 5$ .

Il papiro dice: "Dividi 15 per 5 ed ottieni 3"

Per trovare ora la quantità cercata occorre trovare un numero N tale che al moltiplicarlo per 5 ci dia 15, cioè:

$$5 \cdot N = 15$$

da cui

$$N = \frac{15}{5} = 3$$

Continua il papiro: "Moltiplica 3 per 4 ed ottieni 12"

Il valore cercato è il risultato della moltiplicazione di N (che vale 3) per il valore stimato iniziale (che era 4) cioè  $3 \cdot 4$  che è la quantità cercata. Ed  $\frac{1}{4}$  di 12 è 3 che, sommato a 12, fornisce 15 ( $12 + \frac{1}{4} \cdot 12 = 15$ ).

Vi è un altro papiro, meno importante dei due ai quali mi sto riferendo, il *Papiro di Berlino* <sup>(14)</sup>, in cui vi sono due problemi nei quali vi è la soluzione di quelli che noi oggi conosciamo come sistemi di due equazioni di 2° grado in due incognite. Sono gli unici esempi che conosciamo, semplici ma significativi, anche perché per il loro svolgimento si ricorre all'estrazione di radice quadrata <sup>(15)</sup>.

**Problema.** "*Ti dicono che l'area di un quadrato di 100 braccia quadrate è uguale alla somma di altri due quadrati più piccoli. Il lato di uno di essi è  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$  dell'altro. Trova i lati dei quadrati*".

Tradotto in linguaggio moderno il problema dice: come dividere 100 in due parti in modo che la radice quadrata di una di esse sia  $\frac{3}{4}$  di quella dell'altra e cioè (indicando con x ed y i lati dei quadrati da trovare):

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$y = (1/2 + 1/4)x$$

da cui

$$x^2 + 9/16 x^2 = 100$$

Lo sviluppo che offre il papiro, mediante una approssimazione iniziale, è il seguente.

Supponi che uno dei due quadrati abbia per lato 1 braccio. L'altro lo avrà allora di  $1/2 + 1/4$  di braccio. Le aree saranno, per il primo 1 braccio quadrato e per il secondo il risultato che si ottiene elevando al quadrato  $1/2 + 1/4$ , cioè:

<b>1</b>	<b>1/2 1/4</b>
<b>1/2</b>	<b>1/4 1/8</b>
<b>1/4</b>	<b>1/8 1/16</b>

con il metodo della moltiplicazione otteniamo  $1/4 + 1/8 + 1/8 + 1/16 = 1/2 + 1/16$ .

Allora la somma delle due aree dei quadrati è  $1 + 1/2 + 1/16$  di braccio quadrato. La radice quadrata di questa somma è  $1 + 1/4$ . E poiché la radice quadrata di 100 è 10, dobbiamo trovare un numero N che, moltiplicato per  $1 + 1/4$ , ci dia 100. Occorre cioè dividere 100 per  $1 + 1/4$

<b>1</b>	<b>1 1/4</b>
<b>2</b>	<b>2 1/2</b>
<b>4</b>	<b>5</b>
<b>8</b>	<b>10</b>

Il numero cercato è allora 8. Per trovare il lato dell'altro quadrato si deve moltiplicare per 8  $1/2 + 1/4$

<b>1</b>	<b>8</b>
<b>1/2</b>	<b>4</b>
<b>1/4</b>	<b>2</b>

L'altro quadrato avrà allora 6 braccia di lato.

### RISOLUZIONE DI PROBLEMI GEOMETRICI NEI DUE PAPIRI

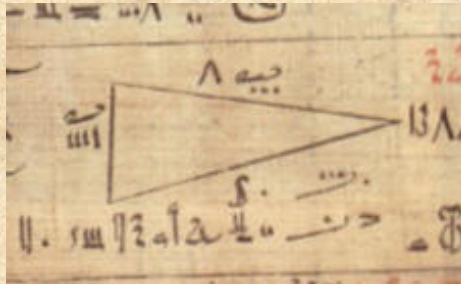
La geometria egizia, come l'aritmetica, è pratica (si sospetta, senza prove, che i sacerdoti conoscessero le premesse teoriche di quanto realizzato in pratica). Dai vari problemi risolti, nei due papiri, gli egiziani sanno calcolare l'area del quadrato, del rettangolo, del trapezio, del triangolo (con qualche dubbio), del cerchio (con buona approssimazione), il volume del cubo, del parallelepipedo, della piramide, del tronco di piramide, del cilindro.

Non vi sono separazioni importanti tra aritmetica e geometria. I due tipi di problemi sono mescolati nei papiri e risolvere un problema geometrico era una applicazione di metodi aritmetici, non risultando teoremi specifici. Alcuni dubbi sulle loro capacità di calcolare

certe aree nascono da difficili interpretazioni delle parole usate nei papiri e da disegni molto mal fatti che a volte pongono il problema di capire che area o che volume si sta calcolando. In ogni caso uno dei difetti di base che appaiono è la mancanza di distinzione tra soluzioni esatte e soluzioni approssimate.

Uno dei problemi del Rhind che incontriamo è relativo alla ricerca dell'area di un campo triangolare.

**Problema 51.** "Se ti si dice: un triangolo di dieci verghe<sup>(16)</sup> di altezza (nel testo: *meryt*) e di quattro verghe alla base che superficie ha ? Tu risponderai nel modo seguente:



Prenderai la metà di 4, cioè 2, per farne il suo rettangolo o: un rettangolo). Moltiplicherai 10 per 2 e troverai la superficie.

Operazioni

1	400
1/2	200

1	1000
2	2000

Risposta: la superficie è 2000 *cubiti* [quadrati, ndr] (cioè due *khâ*) = 20 *arure* ".

La soluzione del problema è troppo succinta per capire bene. Dal modo in cui è risolto il problema sembra che il triangolo sia isoscele e risulta diviso in 2 parti uguali dall'altezza, parti con le quali forma un rettangolo. Secondo alcuni critici se quel *meryt* (che vuol dire genericamente linea) non vuol dire altezza ma lato allora l'impostazione del problema è errata. Resta il fatto che il problema dà un risultato corretto e quindi gli egiziani sapevano calcolare l'area dei triangoli (almeno quelli rettangoli e probabilmente isosceli), e questo anche perché il problema successivo, il 52, mostra chiaramente che sanno calcolare la superficie dei trapezi (anche qui rettangoli) e quindi dovevano saperla trovare per i triangoli (con il dubbio se solo rettangoli o se si accontentavano di questa grossolana approssimazione).

Altro problema che mostra il livello di approssimazione grossolano si trova in un bassorilievo del tempio di Edfu. Vi è descritta una lista di campi, probabilmente donati al tempio, che normalmente avevano 4 lati che possiamo chiamare a, b, c, d, dove a,b e c,d sono coppie di lati opposti. Le aree di questi campi sono date secondo la regola del prodotto della semisomma dei lati opposti:

$$(a + b)/2 \cdot (c + d)/2.$$

Ma alcuni campi sono triangolari, il che vuol dire che il d è nulla (lo zero non c'è) e quindi la regola diventa:

$$(a + b)/2 \cdot c / 2$$

che è un'approssimazione troppo grande soprattutto se si tiene conto che questo documento è databile 500 a.C. cioè proprio a ridosso della grande esplosione della matematica greca.

Nel **Problema 52** si tratta di trovare l'area di una superficie a forma di trapezio isoscele di base maggiore 6, base minore 4 e distanza tra le basi 20. L'operazione è corretta, si prende la semisomma delle basi "in modo da trasformare il trapezio in un rettangolo" e si moltiplica per 20.

Ma passiamo ad uno dei maggiori successi riconosciuti alla matematica egizia, quello del calcolo dell'area di un cerchio, affrontato nel

**Problema 50.** "Metodo per calcolare un appezzamento di terreno circolare il cui diametro è 9 verghe. Qual è la sua superficie ?



Devi sottrarre il suo nono da 1. Resta 8. Allora devi moltiplicare 8 otto volte, il che fa 64. Ecco che la superficie è 6 *khâ* e 4 *setat*.

Ecco come si fa:

1	9
1/9	da questo 1

Sottrai da questo, resta 8

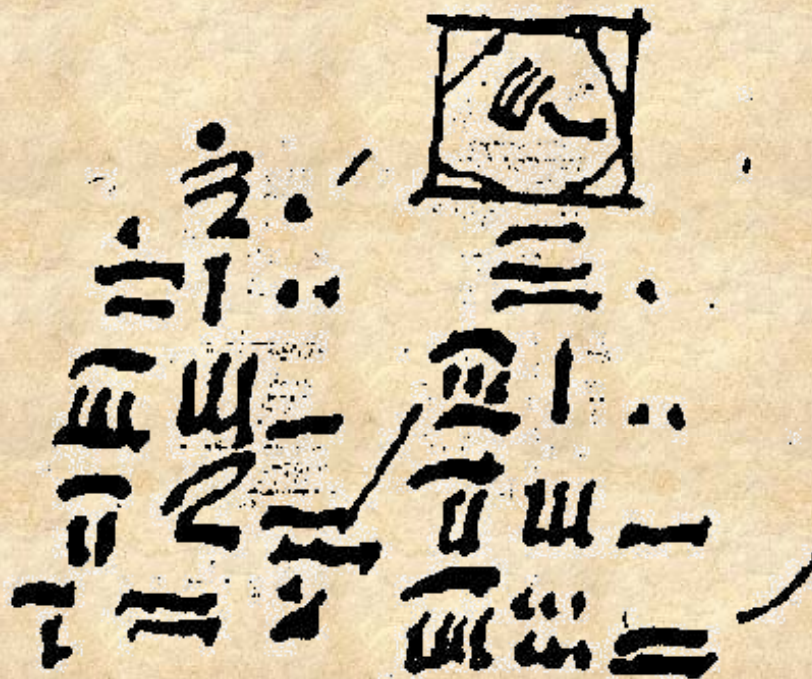
1	8
2	16
4	32
8	64

La superficie di terra è 6 *khâ* (scritto 60) e quattro *setat*".

E' chiaro come si procede. Si sottrae 1/9 al diametro e si eleva il risultato al quadrato. Il calcolo corrisponde ad assegnare a  $\pi$  il valore 3,16 (gli altri popoli dell'antichità davano a quel  $\pi$  il valore 3). Ma, ribadisco, non risulta da nessuna parte che gli egizi considerassero il  $\pi$  come una costante.

Un indizio del come arrivare alla soluzione del problema 50, lo si può trovare nella soluzione del problema 48 nel quale

**Problema 48.** "Comparare l'area di un cerchio con quella del quadrato circoscritto". Consideriamo intanto la figura che è ancora molto poco chiara e cerchiamo di capire l'importanza del problema. E' il primo tentativo noto di ricavare aree di figure complesse, tramite quella di figure più semplici note.



Inoltre si potrebbe da qui capire come si è arrivati al valore di  $\pi$  del problema 50.

La soluzione che ci viene offerta è la seguente. Si ipotizza un diametro pari a 9 e si calcola l'area del cerchio come se fosse quella di un quadrato di lato 8 (procedimento visto nel problema 50). Si trova un valore di 64 *setat*. A questo punto subentra la poco chiara figura. Da essa sembra che l'autore abbia suddiviso i lati del quadrato di lato 9 in tre parti uguali, di modo da costruire un ottagono. Si eliminano poi i triangoli formati ai vertici del quadrato e si trova l'area dell'ottagono data correttamente dall'area del quadrato meno, appunto, i 4 triangoli:

$$A = 9^2 - 4 \cdot (3 \cdot 3) / 2 = 63$$

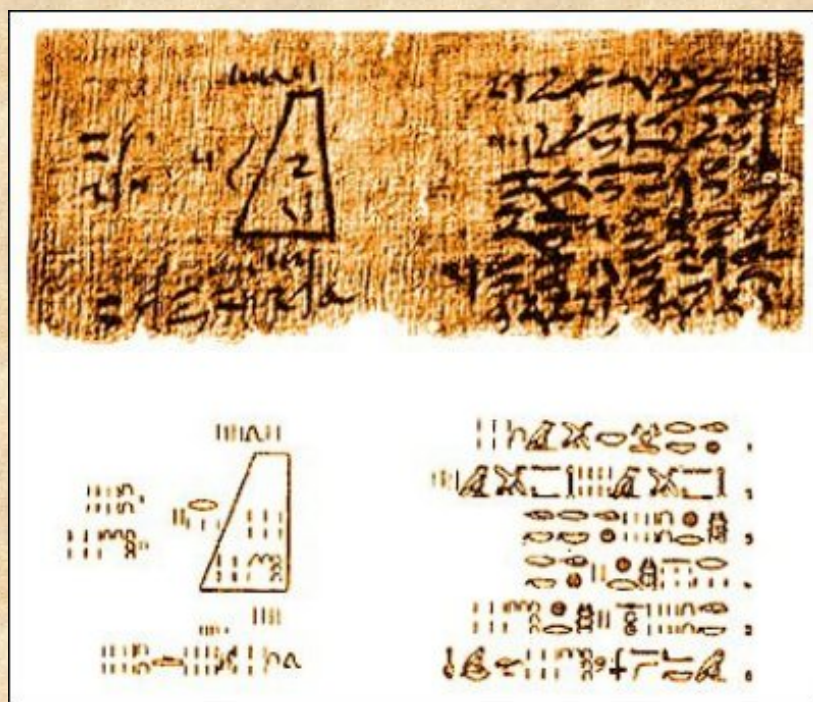
e questa è un'approssimazione dell'area del cerchio, accettabile e quasi corrispondente a quella di un quadrato di lato 8 (come fatto nel problema 50) e ad assegnare a  $\pi$  il valore di circa 3,115.

Boyer sostiene che la comparsa in diversi conti del numero originato da  $4(8/9)^2$  che vale quel 3,16 al quale ci siamo riferiti nel problema 50, mostrerebbe che gli egiziani conoscessero la valenza di tale costante. La cosa, a suo giudizio, sarebbe dimostrata dalla regola egiziana per trovare la circonferenza di un cerchio: secondo tale regola il rapporto tra l'area di un cerchio e la circonferenza è uguale al rapporto tra l'area del quadrato circoscritto ed il suo perimetro.

Passiamo ora a considerare problemi in cui si affronta la ricerca di volumi. Quelli di maggiore interesse sono nel papiro di Mosca, il cui problema 14 ci presenta il calcolo del volume di un tronco di piramide.

**Problema 14** del papiro di Mosca. Si chiede di calcolare l'area della figura, che sembra essere un trapezio isoscele, ma dal contesto si capisce che si vuole calcolare un tronco di

piramide quadrangolare.



Intorno al disegno si possono vedere dei segni ieratici che forniscono le dimensioni. Nella parte superiore compare un 2, nella inferiore un 4 e dentro la figura un 56 e un 6. Lo svolgimento del problema fa capire che si sta calcolando il volume del tronco di una piramide quadrangolare di altezza 6 e basi superiori ed inferiori di 4 e 2. Seguiamo lo sviluppo:

- Elevare al quadrato 2 e 4
- Moltiplicare 2 per 4
- Sommare i risultati precedenti
- Moltiplicare il risultato ottenuto per un terzo di 6. Il risultato è 56.

Lo scriba termina dicendo: "Vedi, è 56; lo hai calcolato correttamente". E questa frase mostrerebbe che il papiro Rhind non è altro che un quaderno di esercizi per uno studente. Se si dovessero ricavare le conoscenze matematiche della nostra epoca da un quaderno di uno studente di liceo scientifico, si direbbe che agli albori del 2000 siamo semianalfabeti in matematica.

Letto comunque il risultato ora dato, alla luce di quanto sappiamo oggi, è l'applicazione della formula che conosciamo per il volume di un tronco di piramide

$$V = h/3 \cdot (a^2 + b^2 + ab)$$

formula che non compare nel papiro. Se facciamo  $b=0$ , come appare in un altro conto ad Edfu, si ottiene il volume di una piramide.

Il risultato trovato per il volume del tronco di piramide è notevole, neppure realizzato nella matematica classica. Questo risultato (come regola generale dimostrata) lo ritroviamo solo nel 1220 nella Geometria di Leonardo Pisano, cioè oltre 3000 anni dopo !

Gli storici non sono riusciti a comprendere in che modo si sia potuti arrivare a questo metodo di calcolo. Si ipotizza che gli egizi abbiano scomposto il tronco di piramide in parallelepipedi, prismi e piramidi, sostituendo successivamente prismi e piramidi con blocchi rettangolari di uguale dimensione (a proposito si può vedere Boyer alle pagine 23-



25), ma non vi sono documenti in proposito.

Altro risultato notevole del papiro di Mosca è quello che ci offre il problema 10.

**Problema 10** del papiro di Mosca. Si chiede di calcolare l'area di una superficie che a prima vista sembrerebbe quella di un cesto di diametro 4,5. Altri studiosi (1930) hanno invece intravisto il primo calcolo della superficie di una semisfera. Forti aggiunge che l'area trovata equivale a quella di due cerchi massimi e che vi è una qualche probabilità che in epoche remote qualche artigiano addetto alla doratura delle cupole abbia scoperto che la sostanza necessaria coprire una cupola semisferica fosse doppia di quella necessaria ricoprire il cerchio di base. E' da osservazioni non banali di questo tipo che si sono fatti progressi molto importanti. In ogni caso seguiamo la soluzione del problema. Sembra si utilizzi la formula

$$S = (1 - 1/9)^2 (2d).d,$$

dove il diametro  $d$  vale  $d = 4,5$ . Il risultato che viene presentato è 32 unità. Se si tiene conto che  $(1 - 1/9)^2$  è il valore corrispondente a  $\pi/4$  se  $\pi = 3.1/6$  era il valore impiegato, allora la superficie da studiare potrebbe essere proprio quella di una semisfera di diametro 4.5. Se le cose stessero così si tratterebbe del primo calcolo noto dell'area di una semisfera, anticipante di 1500 anni i primi calcoli noti relativi all'area di una sfera.

#### UNA OSSERVAZIONE DOVEROSA

Alla fine di questo sunto di ciò che di più importante si conosce sulla matematica egizia, si può concludere con le parole dello storico della matematica Jean Vercoutter (bibl.7):

*"Prima di chiudere questa descrizione della matematica ... egiziana, vogliamo accennare a quella che in molte opere è ancora chiamata «la scienza segreta dei faraoni». È utile ricordare che non sappiamo niente di tale scienza, la cui esistenza è cosa estremamente dubbia. Tutte le speculazioni fatte sulle «cifre» della grande piramide, tra le altre sono puerili e lo sarebbero state anche se gli autori avessero utilizzato misure e numeri esatti, il che non avvenne. Perché poi, soltanto la Grande Piramide avrebbe dovuto trasmetterci, con un metodo oscuro, e quasi impenetrabile, una scienza così avanzata da sorpassare la scienza greca, avvicinandosi a quella moderna? Vi sono più di 150 piramidi nella valle del Nilo a partire dal delta fino al Sudan, e soltanto quella di Cheope ci dovrebbe dare il vero valore di  $\pi$ , la dimensione del raggio della terra, e la misura esatta d'un arco del meridiano terrestre? Ci si rende conto della absurdità di questa supposizione fondata, ricordiamolo, su misure inesatte".*

A questo proposito ricordo che l'astronomo francese, Paul Couderc, per sfatare i miti degli ufologi a proposito della grande piramide di Giza, operò delle misure accurate di una edicola di *Place de la Concorde* a Parigi e scoprì che vi erano tante regolarità legate a costanti universali, a distanze tra pianeti, a dimensioni terrestri, a distanze con galassie da far vergognare la piramide di Cheope. Fatta questa osservazione che vuole scoraggiare ogni volo fantastico che con la scienza non ha nulla che vedere, concludo questa parte, relativa all'Egitto, e rimando alla seconda parte relativa alla Mesopotamia.

## SEGUE

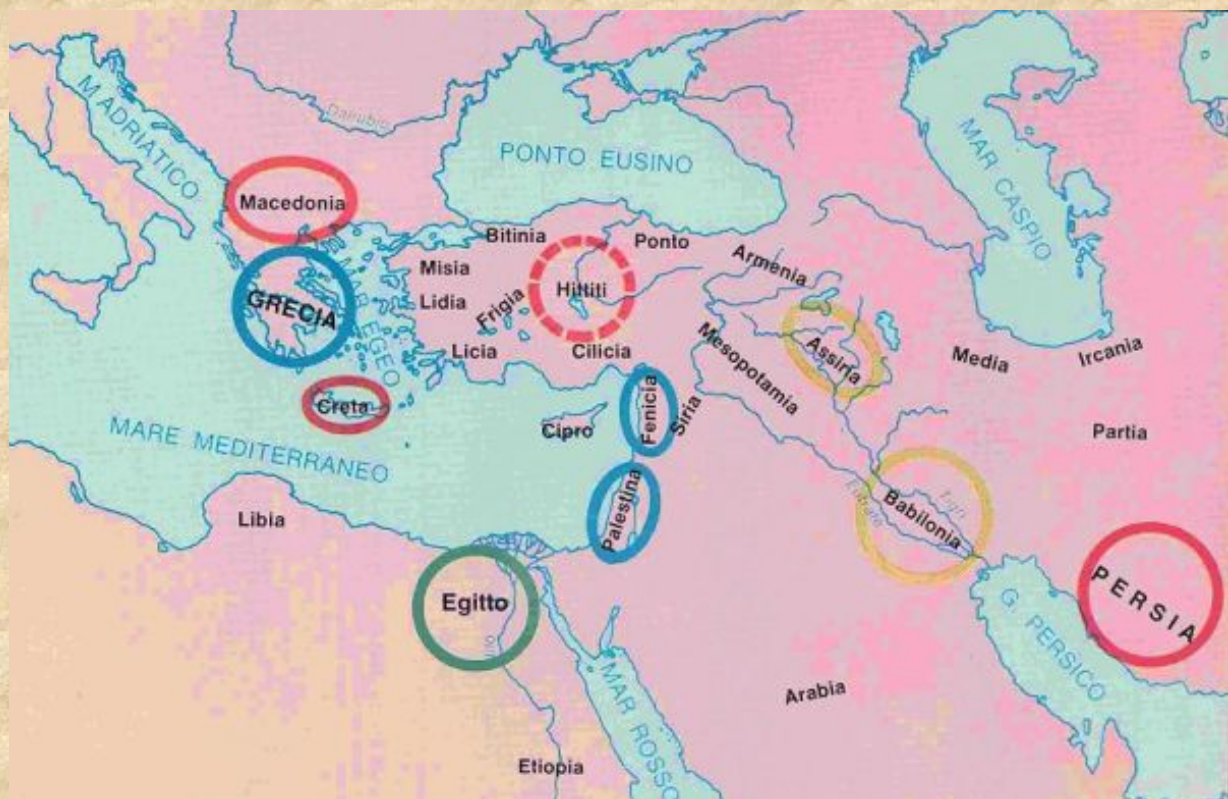
### NOTE

(1) Lubbock aveva notato il comportamento seguente di una cornacchia. Essa aveva nidificato sulla torre di un castello e molestava il proprietario che voleva cacciarla o farla fuori. Ogni volta che lui saliva sulla torre la cornacchia scappava per ritornare quando il proprietario si era allontanato. Il proprietario salì allora con un amico per poi far scendere solo l'amico, mentre lui si era nascosto. Ma la cornacchia non tornò finché non vide scendere anche la seconda persona. La cosa si ripeté con due amici. I due amici riscesero ed egli restò nascosto. Ma la cornacchia non tornò finché non vide ridiscendere anche la terza persona. La cornacchia fu catturata solo quando uno rimase nascosto e ben cinque ridiscesero dalla torre. Quel cinque era già un numero che confondeva l'animale che invece era restato saldo fino a quattro.

(2) La misura degli angoli mediante il sistema a base 60 (sessagesimale) risale agli albori dell'astronomia. La scelta di dividere il cerchio in  $360^\circ$  non è casuale ma corrisponde all'incirca al numero dei giorni dell'anno solare, di modo che, un grado rappresenta il percorso angolare apparente del sole sul cerchio dell'eclittica in un giorno. Allo stesso modo, riferendosi alla rotazione terrestre, si può dividere un cerchio in 24 ore e misurare gli angoli in ore, minuti e secondi *orari*, come si fa appunto in astronomia.

(3) I greci chiamarono Mesopotamia - paese tra i due fiumi - la parte superiore della pianura tra l'Eufrate e il Tigri, Babilonia la parte inferiore fino al mare, Assiria la regione dell'alto Tigri fin presso i monti dell'Armenia al nord e della Media all'est, Susiana o Elam la regione fra il Tigri e il Choaspes.

Date e luoghi d'origine delle più note civiltà sviluppate in Medioriente ([http://www.latlantide.it/storia/civ\\_medio.htm](http://www.latlantide.it/storia/civ_medio.htm)):



- SUMERI (4°-2° millennio a.c.) in MESOPOTAMIA meridionale
- EGIZIANI (4°-1° millennio a.c.) in EGITTO e in LIBIA
- FENICI (4°-1° millennio a.c.) in LIBANO
- ACCADI (3000-2000 a.c.) in MESOPOTAMIA centrale
- ELAMITI (3°-1° millennio a.c.) in IRAN meridionale, influenzarono i SUMERI nel 3° millennio a.c.
- AMORRITI (3°-2° millennio a.c.) in SIRIA
- CANANEI (3000-1200 a.c.), in PALESTINA prima degli EBREI
- ARAMEI (3°-1° millennio a.c.) in SIRIA
- HITTITI (2500-700 a.c.) in ANATOLIA centrale
- HURRITI e MITANNI (2500-700 a.c.) in MESOPOTAMIA settentrionale; essi furono assorbiti dagli HITTITI nel 15° secolo a.c. ma durante il lungo scontro HITTITI - EGIZIANI, gli HURRITI si divisero; un gruppo filoegiziano costituì il Regno dei MITANNI con la Capitale WASSUKKANNI, opponendosi agli HITTITI e agli ASSIRI.
- CASSITI o COSSEI (2500-1100 a.c.) in MESOPOTAMIA meridionale
- CALDEI (14°-6° secolo a.c.) costituirono il 2° IMPERO BABILONESE o IMPERO NEO BABILONESE (625-538 a.c.)
- ASSIRI (2000-606 a.c.) in SIRIA.
- EBREI (1800 a.c. - 70 d.c.) in PALESTINA
- FILISTEI o PELESET (1400-900 a.c.), uno dei POPOLI del MARE (1280-1190 a.c.) che devastarono le civiltà HITTITE, MICENEE, EGIZIANE e SIROPALISTINESI; vennero sconfitti dagli EGIZIANI nel 1200 a.c. e ritirandosi si stabilirono in SIRIA meridionale costituendo l'omonimo Regno denominato PALESTINA, derivato appunto da PELESET o PELESATI
- POPOLI DEL MARE (1280-1190 a.c.) varie popolazioni dall' ANATOLIA e dalla SIRIA, che pressate dall'espansione dei potenti Regni MICENEE, HITTITI, ASSIRI, SIROPALISTINESI ed EGIZIANI, si unirono in varie coalizioni contro i suddetti Regni, portando il caos in tutto il mar Mediterraneo
- Antichi ARABI - MINEI - SABEI (12° secolo a.c. -10° secolo d.c.) nella parte sudoccidentale della penisola ARABICA, si svilupparono in piccoli Regni, caratterizzati dalle loro tipiche case/torri (SOUKS) sulle alture rocciose che difesero molto bene, respingendo anche i temuti eserciti ASSIRI.
- MEDI (1° millennio a.c.) in IRAN centrale, Regno di MEDIA
- PERSIANI (1° millennio a.c.) a sud dell'altopiano dell'IRAN, Regno di PERSIA
- PARTI (4°secolo a.c. - 3 ° secolo d.c.) nell'IRAN orientale, Regno di PARTIA
- SASSANIDI (224 d.c. - 651 d.c.) dinastia di derivazione PERSIANA
- ARABI (651-10° secolo) diffusero l'ISLAMISMO
- SELGIUCHIDI (1000-1300) in TURCHIA centrale; una DINASTIA di Sultani Turchi che durante le crociate si espansero in tutto il MEDIORIENTE; il Turco SALADINO divenuto Re d'EGITTO, unì le quattro terre dell'ISLAM nel 1174, contro i Regni CROCIATI. L'ISLAM in quel periodo era diviso da quattro principali etnie, i SELGIUCHIDI al nord in TURCHIA, i SIRIANI in SIRIA e in PALESTINA, i BABILONESI al sud in MESOPOTAMIA e gli EGIZIANI ad ovest in nord AFRICA. La causa comune che legò queste popolazioni, gettò le basi dell'Impero più vasto della storia, quello OTTOMANO
- OTTOMANI (1300-1922) il più potente IMPERO ISLAMICO derivato dai Regni SELGIUCHIDI; si estese dall'INDIA al nord AFRICA, dalla PALESTINA all'UNGHERIA, comprendendo buona parte del bacino Mediterraneo con le grandi isole di CIPRO, CRETA (allora chiamata CANDIA dai VENEZIANI), RODI, e tutta la GRECIA con le sue numerose isole minori

#### **Dominazioni a BABILONIA, il cuore della MESOPOTAMIA :**

1. ACCADI (2900-2300 a.c.)
2. CASSITI (2300-2100 a.c.)
3. SUMERI (2100-1793 a.c.)
4. SUMERI + AMORRITI (1793-1595 a.c.) PRIMO IMPERO BABILONESE
5. HITTITI (1595-1590 a.c.)
6. CASSITI (16°-14° secolo a.c.)
7. CALDEI (13° secolo a.c.)
8. ARAMEI (12° secolo a.c.)
9. ASSIRI (1115-625 a.c.) IMPERO ASSIRO-BABILONESE
10. CALDEI (IMPERO NEOBABILONESE 625-538 a.c.)

11. PERSIANI (538-331 a.c.)

12. ELLENICI e SELEUCIDI (331-64 a.c.)

(4) Tra i vari problemi nel 50 vi è la formula che dimostra come l'area di un campo circolare con un diametro di 9 unità sia uguale all'area di un quadrato con un lato di 8 unità:

*"Un campo rotondo di 9 khet di diametro. Qual è la sua area? Togli 1/9 dal diametro, 1; il rimanente è 8. Moltiplica 8 per 8: fa 64. Quindi esso contiene 64 sesat".*

Si tratta di una formula approssimata per calcolare l'area di un cerchio di diametro  $d$ :

$[d - (1/9)d]^2$ . Dal confronto di questa regola con la relazione oggi nota che permette di calcolare l'area di un cerchio di raggio  $r$ :  $S = \pi \cdot r^2$ , risulta che gli egiziani attribuiscono a  $\pi$  un valore di circa  $3 + 1/6$  (cioè 3,16) approssimazione abbastanza vicina al valore 3,14 che oggi accettiamo. E' di grande importanza dire che gli egiziani non consideravano  $\pi$  come una costante e non sappiamo come siano arrivati al valore assegnato.

(5) La *regula falsi* o metodo della falsa posizione si utilizza nella soluzione di equazioni di primo grado del tipo  $ax = b$ . Si pone  $x = A$  (la falsa posizione) ed in generale accadrà che  $aA$  è diverso da  $b$ . Si dice allora: per  $A$  che avevo posto viene  $aA$ , quanto dovrò porre affinché venga  $b$ ? Ed il risultato è:  $aA/bA = a/b$ . Avverto che la  $x$  che ho ora usato è del tutto impensabile in ogni elaborazione sia egizia che sumera.

(6) *Heqat* o *moggio*: unità di misura di capacità che era rappresentata come l'occhio di Horus (vedi nota 7). Era utilizzata per misurare grano e malto corrispondendo a 4,8 litri.

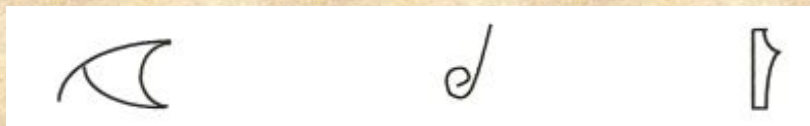
(7) Dal sito [http://www.matematicamente.it/storia/frazioni\\_egiziane\\_appendici.doc](http://www.matematicamente.it/storia/frazioni_egiziane_appendici.doc) : *Il mito dell'occhio di Horus. Secondo un'antica leggenda Horus, figlio di Iside e di Osiride, volle vendicare la morte del padre, ucciso dal fratello Seth. Nella lotta Horus perse un occhio le cui parti vennero ritrovate e ricomposte dal dio Toth a meno di una piccola parte. L'occhio di Horus fu considerato un potente amuleto; al simbolo vennero attribuiti poteri magici con significati diversi nei vari campi del sapere. In matematica il simbolo fu scomposto in sei parti e ad esse si fecero corrispondere le sei frazioni unitarie più frequenti, quelle corrispondenti agli inversi delle prime sei potenze di 2:*



= 1/2

= 1/4

= 1/8

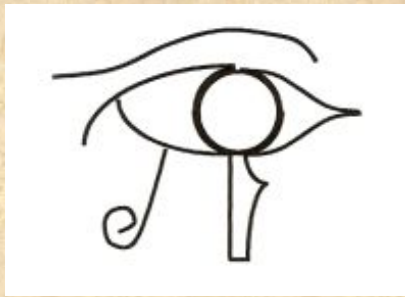


= 1/16

= 1/32

= 1/64

*La somma delle parti differisce dall'unità di 1/64. Ad ogni parte dell'occhio si fece corrispondere un senso; nell'ordine: il tatto (1/64), il gusto (1/32), l'udito (1/16), il pensiero (1/8), la vista (1/4) e l'olfatto (1/2). La costruzione del simbolo segue una precisa regola. I sensi erano ordinati quindi secondo l'importanza loro attribuita, a seconda cioè dell'energia "utilizzata" per ricevere una particolare sensazione. Tutti i dati ricevuti erano l'alimento della conoscenza.*



(8) *Pesu*: E' una unità di misura egiziana che esprime la qualità o valore nutritivo del prodotto fabbricato. E' una unità molto elastica che, a seconda degli scribi, assume valori che vanno da 10 a 30.

(9) *Henu*: Unità di misura di capacità, sottomultiplo dell'*heqat*. L'*henu*, essendo un decimo di *heqat*, corrisponde a 0,48 litri.

(10) Lo *ieratico* era la lingua corsiva tradizionale dei sacerdoti, più agile del geroglifico. In epoca più tarda si avrà anche una scrittura popolare dello stesso tipo, anch'essa facente a meno del geroglifico. Era utilizzata dai sacerdoti proprio per impedire il riconoscimento immediato della forma pittografica originale. Come vedremo, anche i numeri, in questa lingua, si potevano scrivere in modo più agile che non nel sistema ripetitivo dei geroglifici.

(11) *Braccio o cubito reale* (dal latino *cubitum*, gomito): in egizio Meh (simbolo: mH), equivale a 52,3 cm e si divide in 7 palmi ciascuno dei quali costituito da 4 pollici, per un totale di 28 pollici. *Palmo*: in egizio Shesep (simbolo: Ssp), equivale a 7,741 cm. *Pollice*: in egizio Djeb'a, equivale a 1,87 cm. Più in generale il cubito era la misura di lunghezza più comune dell'antichità. Era rappresentata dall'avambraccio a partire dal gomito fino alla punta del dito medio. Era l'unità di misura utilizzata dagli antichi Egizi per misurare, progettare e costruire templi, tombe, piramidi, ecc. L'idea di individuare un'unica unità di misura è problema che si pose tra le popolazioni primitive quando, come accennato, si iniziarono ad utilizzare semplici bastoni di legno incisi con tacche, ma questo sistema risultò troppo soggettivo e perciò variabile da persona a persona. Vennero quindi introdotte altre unità di misura che si rifacevano geroglifica è indicato con il disegno dell'avambraccio umano (meh). I cubiti venivano realizzati in legno, pietra o materiali preziosi a seconda del loro uso e del loro proprietario. Gli esemplari lignei, solitamente in possesso degli artigiani, erano spesso approssimativi, mentre i cubiti cerimoniali realizzati per essere depositi nei templi del faraone che li ha commissionati insieme ad invocazioni ed elogi in suo favore (<http://www.veja.it/>).

(12) Riporto questo problema per esteso per rendere conto della sua poca chiarezza. "*Metodo per calcolare la mescola di pane per sacrifici. Se ti dicono 20 misure di 1/8 de heqat [vedi nota 6, ndr] y 40 misure di 1/16 di un heqat, calcola 1/8 de 20. Risulta 2 1/2. Calcola ora 1/16 de 40. Risulta 2 1/2. Il totale di ambedue le metà è 5. Calcola ora la somma delle altre metà. Il risultato è ora 60. Dividi 5 per 60. Risulta 1/12. Allora la mescola è 1/12*".

(13) Nello scrivere il modo di fare il prodotto in Egitto, mi è tornato in mente un racconto di fantascienza letto da ragazzo (non ricordo dove). In un futuro lontanissimo, l'uso delle calcolatrici e di ogni metodo automatico aveva fatto completamente dimenticare all'uomo il modo di fare il prodotto manualmente con carta e penna, come ancora facciamo noi. I testi che riportavano il modo di farli erano andati perduti in qualche catastrofe prevedibile. Un archeologo riuscì a scoprire delle tracce della nostra civiltà. Scoprì alcuni quaderni di scuola elementare chissà come salvatisi. Dopo aver lavorato moltissimo, riuscì a spiegare ai suoi contemporanei il modo della nostra antica civiltà di fare la moltiplicazione. Divenne famoso e, con scarsa comprensione ma con molto interesse del pubblico, tenne conferenze nelle maggiori istituzioni culturali del futuro. [Un cortese lettore mi ha indicato la referenza di questo racconto di fantascienza. Si tratta di Isaac Asimov, *The Feeling of Power* del febbraio 1958. Il racconto breve fu tradotto in italiano con il titolo *Nove volte sette* (ma non ricordo su quale rivista) ed è riportato in [http://web.ticino.com/aladino/calcolatori/racconto\\_asimov.htm](http://web.ticino.com/aladino/calcolatori/racconto_asimov.htm) ]. Eppure noi riteniamo semplice il moltiplicare. Certo se si trovasse un quaderno e non si avessero presenti le tabelline, che nel quaderno non sono scritte, si avrebbero problemi enormi a capire e chissà quale ricostruzione faremmo. Ho voluto dire questo perché le

ricostruzioni senza molti documenti, possono essere discutibili fino al punto da dover ribaltare tutto con una nuova scoperta archeologica. Riporto quanto affermato da uno studioso di questi problemi, E. M. Brunis, *Quelques textes mathématiques de la mission de Suse* (Proceedings della Reale Accademia Olandese delle Scienze, Vol. LIII, n° 7, 1950). Dice Brunis: «Le tavolette matematiche della missione di Susa gettano una luce del tutto nuova su "le matematiche dei Babilonesi". ... L'opinione comune che le matematiche babilonesi non considerassero che problemi pratici, è nettamente contraddetta dalla tavoletta D ed S. ... I problemi ivi sono stati veramente posti e risolti dal punto di vista puramente scientifico: la scienza per la scienza».

(14) Oltre ai papiri Rhind e Mosca ai quali mi sto riferendo, vi sono altre fonti documentali, molto meno estese ed importanti, dalle quali estrarre informazioni sulla matematica egizia. Tra di esse vi sono due papiri molto frammentari, quelli di Kahoun (chiamato così perché trovato a Kahoun nell'Afghanistan) e di Berlino, risalenti al 1800-1900 a.C.; il papiro Reisner del Museo delle belle arti di Boston, scoperto nel 1604, costituito da 4 frammenti e databile all'epoca di Sesostri I; il rotolo di cuoio, acquistato da Rhind contemporaneamente all'altro papiro, che riporta in pessimo stato equivalenze di frazioni unitarie e sembra essere un quaderno di appunti di uno studente.

(15) La radice quadrata era chiamata *angolo* con chiaro riferimento all'angolo ottenuto mediante la divisione di un quadrato con la sua diagonale. Si hanno pochi esempi di estrazione corretta di radice e non si conosce il procedimento. Il simbolo della radice quadrata era



16) Riporto alcune unità di misura che incontreremo più oltre e che non abbiamo ancora incontrato.

*Verga (jet)*, unità di misura di lunghezza, pari a 52, 3 metri.

*Setat*, unità di misura di superficie, pari ad un quadrato di lato 100 braccia, quindi 10000 braccia quadrate.

*Arura*, unità di misura di superficie, pari ad un verga al quadrato, quindi a 2735 metri quadri.

*Khâ*, che letteralmente vuol dire migliaio, è un multiplo dell'arure. Un *khâ* vale 10 *arure*.

---

## **BIBLIOGRAFIA**

- 1) - Carl B. Boyer - *Storia della matematica* - Mondadori 1980
- 2) - Morris Kline - *Mathematical thought from ancient to modern times* - Oxford University Press, 1972
- 3) - Lancelot Hogben - *Mathematics in the Making* - Rathbone Books, London 1960
- 4) - U. Forti - *Storia della scienza I. Dalle origini al periodo alessandrino* - Dall'Oglio 1968
- 5) - Giancarlo Masini - *Storia della matematica* - SEI 1997

6) - Marguerite Rutten - *La science des chaldéens* - Presses Universitaires de France 1970

7) - René Taton (diretta da) - *Storia generale delle scienze* - Casini 1964

8) - André Pichot - *La nascita della scienza* - Dedalo 1993

9) - George Gheverghese Joseph - *C'era una volta un numero* - Il Saggiatore 2003

10) - <http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/geometria.htm>

---

[Torna alla pagina principale](#)

