UN ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELLA MATEMATICA AD UN PROBLEMA FISICO:

CAMPI CONSERVATIVI

Roberto Renzetti

Nella mia attività di insegnamento ho notato, come credo tutti i colleghi, che si tende a vedere la matematica come un qualcosa di diverso dalla fisica. Voglio dire che a nessuno degli studenti viene in mente semplicemente che una operazione matematica sia applicabile ad un fenomeno naturale, tanto più quanto la matematica *si complica* . Nelle scuole secondarie di secondo grado, dove si affronta lo studio dell'analisi matematica, ci si scontra con una difficoltà che riguarda da un lato le capacità astrattive che molti studenti tardano a raggiungere mancando opportune sollecitazioni che aiuterebbero, dall'altro il non coordinamento degli insegnamenti. L'analisi potrebbe assolvere un ruolo fondamentale nell'insegnamento della cinematica e della dinamica (si pensi ai salti mortali che occorre fare per spiegare quell' ½ che troviamo nella relazione che fornisce lo spazio percorso da un oggetto in moto uniformemente accelerato) ma, in quel momento, si fa dell'altro in matematica probabilmente per problemi di propedeuticità non risolti. Il primo momento in cui si può utilmente integrare fisica con un poco di matematica avanzata è nello studio dell'elettrostatica poiché in quel momento iniziamo a disporre della matematica opportuna e possiamo approfittare anche per recuperare concetti più generali come quello di *campo*.

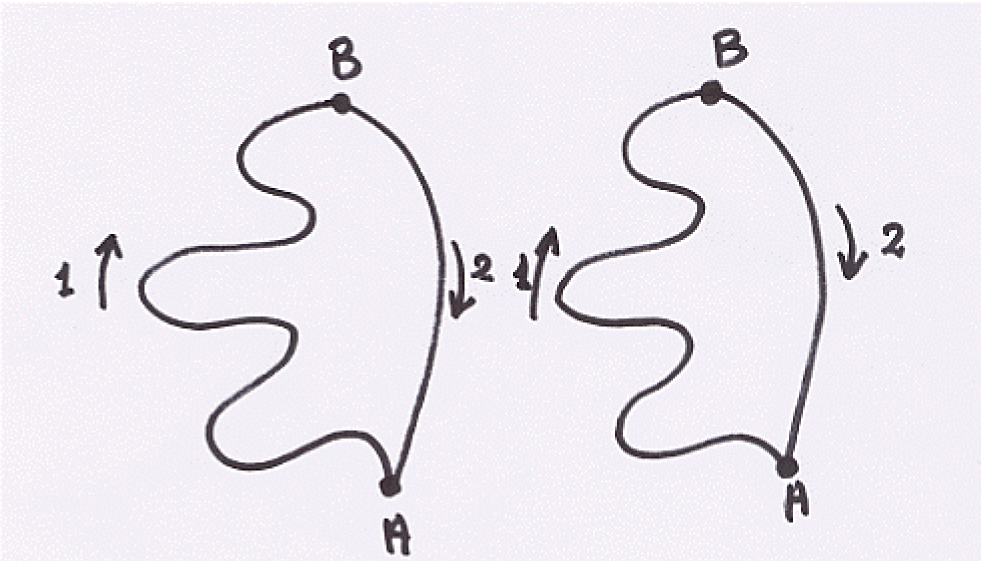
Non sto qui a spiegare tutto ciò che porta a dover definire la conservatività, basta solo ricordare che, senza aver definito la conservatività di un campo è impossibile definire il potenziale. Probabilmente se ne sarà parlato studiando il campo gravitazionale ma certamente si arriva a capire bene come stanno le cose avendo in mano dei concetti al limite ed iniziando a ragionare in tale contesto. Tra l'altro si presenta una occasione importante per capire fino in fondo la potenza della matematica che inizia a diventare analisi. E questa non solo è uno strumento che permette di risolvere alcune questioni altrimenti sfuggenti ed indeterminate, ma anche in grado di permettere ipotesi ed elaborazioni, altrimenti proibite.

CAMPI CONSERVATIVI

Si definisce conservativo un campo di forze quando il lavoro fatto per spostarsi tra due punti A e B di esso è indipendente dal cammino percorso. Dietro questa definizione vi è un fatto semplice. Supponiamo che da un paesino A a fondovalle si voglia raggiungere una cima B. Tale cima, come si sa, è raggiungibile per varie vie, da quella per principianti a quella per esperti scalatori. L'una sarà una passeggiata che si servirà di molti tornanti, l'altra punterà a perpendicolo verso la cima. Ambedue, il principiante e lo scalatore, faranno un lavoro per andare da A a B. Nel caso del principiante si avrà l'applicazione media di una forza minore ma il tragitto è più

lungo; nel caso dello scalatore vi sarà l'applicazione di una forza maggiore per un tragitto però più breve. Si tratta di capire quale lavoro è maggiore se ve ne è uno maggiore. La cosa non è priva di senso, semplicemente perché, ad esempio, dovendo costruire una strada si tenterà sempre di farlo lungo il preteso tragitto in cui il lavoro sia minimo. Fin qui mi sono riferito al campo gravitazionale. Stesse cose si possono dire per campi elettrici, magnetici, elettromagnetici, … evidentemente con esemplificazioni diverse.

Rappresentiamo con un disegno i due punti A e B uniti da due tragitti, l'1 ed il 2 che ci permettono di andare da un punto all'altro secondo il verso delle frecce (Fig. 1).



a **b**

Figura 1

Tornando al campo conservativo e riferendoci alla figura 1°, la definizione data vuol dire che se un campo è conservativo il lavoro fatto per andare da A a B lungo la linea 1 deve essere lo stesso di quello che si fa lungo la linea 2:

$$(L_{AB})_1 = (L_{AB})_2$$

Dire questo equivale a dire che in un campo conservativo il lavoro che si fa per andare da A a B lungo una linea (1) è uguale e di segno opposto a quello che si fa per andare da B ad A lungo un'altra linea (2):

$$(L_{AB})_1 = (-L_{BA})_2$$

Ed in definitiva se si calcola il lavoro fatto per andare da A a B e quindi da B ad A, dopo aver percorso un giro completo (Fig 1b), questo deve essere nullo:

$$(L_{AB})_1 - (-L_{BA})_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L_{AB})_1 + (L_{BA})_2 = 0$$

Dimostriamo in un caso elementare che il lavoro fatto per spostarsi lungo una linea chiusa in un campo gravitazionale è nullo, dimostriamo cioè che il campo gravitazionale è conservativo.

Consideriamo una massa m sferica da dover caricare sul cassone di un camion. Le possibilità evidenti sono due: o facciamo rotolare la massa fin sotto il cassone e poi la solleviamo (cammino 1), o sistemiamo una tavola che ci serva da piano inclinato su cui far rotolare la massa sul cassone del camion (cammino 2). Anche qui facciamo un disegnino per capire meglio (Fig. 2).

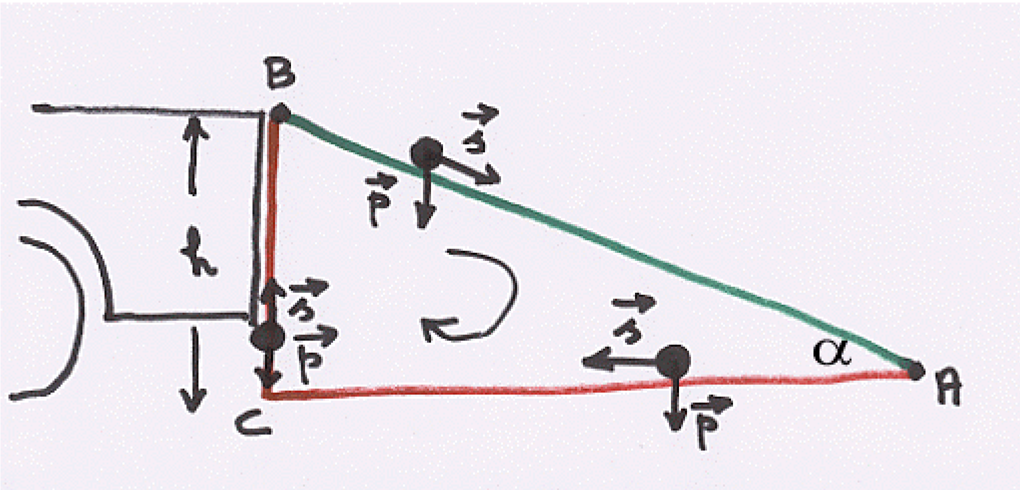


Figura 2

Occorre calcolarsi il lavoro fatto per andare da B ad A, quindi quello fatto per andare da A a C ed infine quello fatto per andare da C a B. La somma di questi valori fornisce il lavoro fatto per spostarsi lungo una linea chiusa all'interno di un campo gravitazionale (si noti che, la linea rossa corrisponde al lavoro che si fa lungo un cammino e la linea verde quello che si fa lungo l'altro cammino: per considerare l'insieme dei due cammini come linea chiusa ho considerato uno dei due cammini percorso in senso inverso, come annunciato nella seconda relazione scritta).

Ricordando che il lavoro è il prodotto scalare di forza per spostamento:

$$L = \vec{F} \times \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos\alpha$$

si trova subito che:

$$L_{BA} = p \,.\, s \,.\, \cos\alpha = p \,.\, h$$

(poiché la forza deve essere moltiplicata per la proiezione dello spostamento su di essa)

$$L_{AC} = 0$$

(poiché la forza è perpendicolare allo spostamento e quindi $\cos\alpha = 0$)

$$L_{CB} = - p \,.\, h$$

(poiché forza e spostamento hanno versi opposti).

In definitiva:

$$L = L_{BA} + L_{AC} + L_{CB} = p \cdot h + 0 - p \cdot h = 0.$$

Con questo conticino elementare si dimostra (solo in questo caso semplice) che il campo gravitazionale è conservativo. Il caso è semplice perché abbiamo supposto implicitamente che le linee lungo cui agisce la forza gravitazionale sono parallele tra loro. Tale approssimazione è pure legittima ma non fornisce una dimostrazione rigorosa.

Per dimostrarlo in generale ci si può servire di identica dimostrazione che darò per il campo elettrico, nel caso in cui le linee lungo cui agisce la forza di tale campo sono radiali, si dipartono cioè da una carica come prolungamento dei suoi raggi.

CONSERVATIVITA' DEL CAMPO ELETTRICO: CASO RADIALE

Si abbia una sfera carica + Q di raggio R. Il campo radiale creato da tale sfera è dato da:

(1) $$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Supponiamo ora di avere una piccola carica + q che si sposti, seguendo una linea di campo,

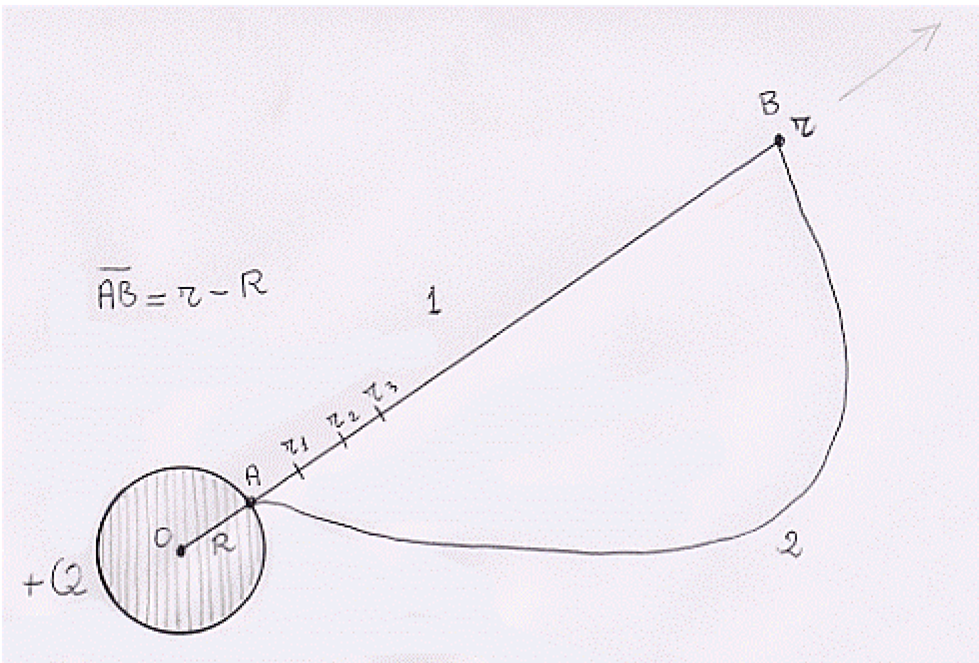


Figura 3

dal punto A (sulla superficie della sfera carica) ad un punto qualunque B. Ora calcoleremo il lavoro che le forze del campo fanno a spostare tale carichetta da A a B (cammino 1), quindi calcoleremo il lavoro che dovremo fare contro le forze del campo per riportare la carichetta in A lungo il cammino 2. Ma torniamo al calcolo del lavoro fatto per portare + q da A a B. Per farlo occorre partire con una osservazione di fondamentale importanza, pena un calcolo errato in tutto. Lo spostamento è AB e qui non vi è nulla da osservare. Ma la forza (che si ottiene moltiplicando la carica + q per il

campo E) è davvero un grave problema perché, osservando la (1), ci si rende immediatamente conto che essa varia con l'inverso del quadrato della distanza (l'analogo della forza gravitazionale). Le altre cose che compaiono nella formula sono delle costanti, anche Q, una volta fissata è quella e basta. Il fatto che la forza vari con il quadrato della distanza, vuol dire che man mano che ci si allontana dalla carica Q tale forza diminuisce. Fin qui è chiaro. Il fatto è che la variazione di tale forza avviene <u>punto per punto.</u> Ciò vuol dire che per calcolare il lavoro fatto per andare da A a B occorre sommare infiniti lavori, quelli fatti punto per punto (della linea AB) che sono diversi tra loro. Se ci mettiamo con la matematica classica a fare questo calcolo troviamo come risultato zero. Una forza moltiplicata per uno spostamento nullo dà zero e sommando infinite volte zero, abbiamo sempre zero. Come fare ? Seguiamo il metodo di calcolo seguente che ci fa capire la potenza dell'analisi matematica.

Suddividiamo la distanza AB = r – R in tanti piccoli segmenti tali che, in ognuno di essi la forza F = q .E sia approssimativamente costante, pari cioè al valor medio (attenzione: non ho detto media aritmetica!) nell'intervallo.

All'inizio del primo intervallo (punto A) la forza che agisce sulla carica +q sarà data da:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^2}$$

alla fine dello stesso intervallo sarà:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_1^2}$$

Il problema è avere una media nell'intervallo di questi due valori. La media aritmetica (sommare i due valori di forza per poi dividere per 2) dovrebbe prevedere una diminuzione costante della forza nell'intervallo. Ma qui la forza diminuisce con il quadrato, se cioè ci si allontana di 2 la forza diventa un quarto, se ci si allontana di 3 la forza diventa un nono, … Una media che risponde allo scopo è la media geometrica, media in grado di determinare il tasso medio di decremento (o accrescimento) di un fenomeno (nel nostro caso: decremento della forza). Si definisce come media geometrica tra N valori (nessuno dei quali negativo o nullo), la radice N-esima del loro prodotto. Nel nostro caso abbiamo 2 valori e quindi dovremo calcolare la radice quadrata del loro prodotto. Chiamando con F_1 la nostra media, si trova:

$$F_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{R^2}\right)\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_1^2}\right)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{Rr_1}$$

Nel secondo intervallo (quello che va da r_1 ad r_2) si troverà:

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_1 r_2}$$

e così via:

$$F_3 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r_2 r_3}$$

…………………………..

Il lavoro che la forza F_1 compie nel primo intervallo, sarà:

$$\Delta L_1 = F_1 \cdot (r_1 - R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{Rr_1}(r_1 - R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Analogamente, per ΔL_2, ΔL_3, …, si trova:

$$\Delta L_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

$$\Delta L_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right).$$

………………………….

Poiché il lavoro complessivo L_3 fatto dalla forza elettrica in questi primi tre intervalli sarà:

$$L_3 = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3$$

si ha:

$$L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)$$

cioè:

$$L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} qQ\left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}\right) + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right)\right] = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_3}\right)$$

Estendendo il ragionamento a tutti gli intervalli, osservando che il secondo termine dentro una parentesi tonda si annulla con il primo della parentesi tonda successiva, si trova che il lavoro totale L_{AB} , per spostare la carica +q da A a B è dato da:

$$L_{AB} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

Prima di andare oltre si deve notare che questo lavoro è fatto dalle forze del campo (è il campo elettrico della carica +Q che allontana la carica +q) e non contro di esse come nel caso in cui, invece di una carica +q, avessimo avuto una carica –q (in tal

caso, per andare da A a B dovevamo essere noi ad esercitare una forza sulla carica –q che altrimenti sarebbe stata spontaneamente attratta da +Q). In quest'ultimo caso l'espressione doveva essere cambiata di segno. Ma torniamo alla discussione che stavamo facendo.

Possibile che occorra ogni volta fare questi ragionamenti induttivi e confidare in semplificazioni che verranno ? Ma poi, siamo sicuri che il calcolo della media geometrica ci dia proprio il valore cercato ? Mi sembra chiaro che il valore migliore per la forza non dovrebbe essere mediato su un intervallo ma dovrebbe essere quello che la forza ha punto per punto. Si tratterebbe quindi di sommare infiniti contributi infinitesimi (come dicevo all'inizio). L'integrale è l'operazione che permette questo tipo di somma. Facendo l'integrale da A a B (cioè da R ad r) delle forza elettrica (nella quale l'erre che compare al denominatore non sarà né R né r ma un ρ variabile tra R ed r, cioè: R $\leq$ ρ $\leq$ r) moltiplicata per l'intervallo infinitesimo dρ della linea di forza, abbiamo il lavoro L_{AB} che abbiamo prima trovato con la lunga elaborazione vista:

$$L_{AB} = \int_R^r F d\rho = \int_R^r \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{\rho^2} \right) d\rho = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^r \frac{1}{\rho^2} d\rho = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{\rho} \right]_R^r = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

Mi pare sia chiaro che il calcolo, l'analisi è qualcosa di fondamentale. Non si viaggia più per tentativi (per quanto sofisticati) ma si arriva a risultati certi in tempi brevissimi e con operazioni (a livello di scuola secondaria) generalmente molto semplici (l'integrale ora fatto è uno degli integrali elementari tabulati).

Volendo ora chiudere il discorso sul campo elettrico, campo conservativo nel caso radiale, occorre fare il conto del lavoro che si fa per tornare da B ad A, attraverso la linea 2 della figura 3. Se facendo questo conto, troviamo lo stesso valore (cambiato di segno) che abbiamo ora trovato per il lavoro, allora potremo concludere che il lavoro fatto per andare da A a B è indipendente dal cammino percorso in accordo con quanto detto all'inizio: il lavoro fatto lungo una linea chiusa è nullo.

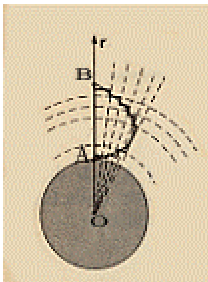


Figura 4

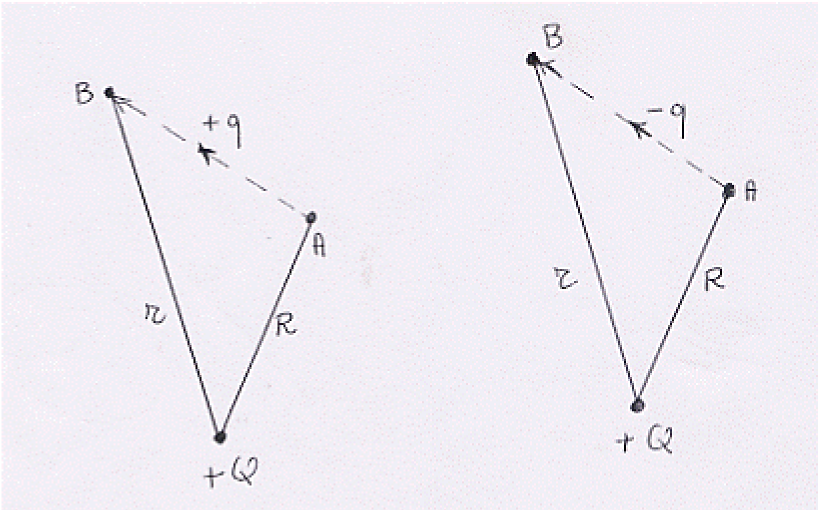
Riferendoci alla figura 4, soffermiamoci sulla linea curva che unisce B ad A. Anche qui mi servirò di ragionamenti analitici. Tale linea la posso pensare costituita da tanti tratti radiali (paralleli alle linee di forza) e da tanti archi di cerchi concentrici alla sfera. Lungo tali archi la forza che sposta la carica non compie lavoro perché la forza è perpendicolare allo spostamento (la forza agisce lungo la linea di forza e tale linea è un raggio della sfera e quindi perpendicolare alla sua superficie ed a tutte le superfici concentriche ad essa). Nel tragitto curvo restano allora solo da considerare i contributi radiali e la somma di tali contributi non è altro che il tratto BA: Pertanto il lavoro

complessivo (lavoro fatto contro le forze del campo) che facciamo per portare la carica +q da B ad A lungo la linea curva non è altro che quello che abbiamo già trovato <u>cambiato di segno</u>. Pertanto:

$$L_{BA} = - L_{AB} \quad \Rightarrow \quad L = L_{AB} + L_{BA} = 0.$$

Con questo abbiamo dimostrato la conservatività del campo elettrico nel caso radiale.

Merita appena una citazione la generalizzazione del caso. Nel caso in cui la carica +q si sposti come mostrato in figura 5a le cose vanno in modo identico a quanto visto e la relazione che ci fornisce il lavoro per andare da A a B è la stessa. Nel caso in



(a) (b)

Figura 5

cui da A a B si sposta una carica – q (figura 5b), come già accennato, occorre cambiare di segno all'espressione che ci fornisce quel lavoro che diventa:

$$L_{AB} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

Aggiungo solo che, con dei conti identici, si dimostra anche la conservatività del campo gravitazionale.

<u>IL POTENZIALE</u>

Riferendoci al caso di figura 5b ed all'ultima relazione scritta ad essa relativa, iniziamo con il ricordare che la variazione di energia potenziale tra due punti A e B è definita come il lavoro fatto per andare da A a B:

$$U_B - U_A = L_{AB}$$

Nel nostro caso abbiamo quindi immediatamente:

$$U_B - U_A = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right).$$

Consideriamo ora U_A come energia potenziale di riferimento ponendola quindi uguale a zero in corrispondenza di un campo che vale zero:

$$U_A = 0 \qquad \text{per} \qquad E = 0.$$

Ora E = 0 a distanza infinita, quando cioè R = ∞ (se si ricorda la relazione 1, si vede subito che al tendere R ad infinito, il campo E tende a zero). Quindi abbiamo:

$$U_B - 0 = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right) \Rightarrow U_B = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

E questo risultato è valido in generale, cioè:

$$U = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

rappresenta il lavoro compiuto per portare la carica q da un certo punto (a distanza r da Q) all'infinito.

Introdotta U è possibile <u>definire</u> il potenziale V come energia potenziale per unità di carica:

$$V = \frac{U}{q} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}.$$

Chiunque studi fisica si accorgerà dell'importanza del concetto di conservatività e di quello di potenziale. Il mio scopo non era quello di entrare in dettagli.