SUL CONCETTO DI FUNZIONE DERIVATA
(K. Marx)

I

Se la variabile indipendente cresce passando da x a x_1, allora la variabile dipendente cresce passando da y ad y_1.

Qui, nella sezione I) viene considerato il caso semplicissimo nel quale x compare solo alla prima potenza.

1) $y = ax$; se x cresce fino a raggiungere il valore x_1, allora

$$y_1 = ax_1 \quad \text{e} \quad y - y_1 = a(x - x_1)$$

Se adesso avesse luogo l'operazione differenziale, se cioè facessimo diminuire x_1 fino al valore x, allora si avrebbe

$$x_1 = x; \qquad\qquad x_1 - x = 0$$

quindi

$$a.(x_1 - x) = a.0 = 0$$

Inoltre, poiché y aveva acquistato il valore y_1, solo perché x era diventato x_1, si avrebbe ora del pari

$$y_1 = y, \qquad\qquad y_1 - y = 0$$

Quindi

$$y_1 - y = a.\,(x_1 - x)$$

trapassa in $0 = 0$.

Porre dapprima la differenziazione e poi annullarla di nuovo conduce quindi al nulla in senso letterale. Tutta la difficoltà nella comprensione della operazione differenziale (come in generale in quella della *negazione della negazione*) consiste proprio in ciò: nel vedere *come* essa si distingue da un tale semplice modo di procedere e conduce quindi a risultati effettivi.

Se dividiamo $a(x_1 - x)$, e corrispondentemente anche il secondo membro della equazione, per il fattore $x_1 - x$, otteniamo:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a$$

Poiché y è la *variabile dipendente*, non può in linea generale compiere nessun movimento indipendente (in questo caso, perché y =

ax); y_1 non può perciò diventare uguale a y, e quindi neppure y_1—y = 0, senza che prima x non sia divenuto = x_1. D'altro lato abbiamo visto, che x_1 non poteva diventare = x nella funzione a(x—x_1), senza rendere uguale a 0 questa ultima. Il fattore x_1—x era perciò *necessariamente* una *differenza finita*, nel momento in cui primo e secondo membro della equazione venivano divisi per esso. Nel momento in cui si stabilisce il rapporto

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

x_1 - x   è perciò sempre una differenza finita; di conseguenza

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

è un *rapporto di differenze finite*, e in conseguenza di ciò

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Quindi:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} ovvero \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

dove la costante a **figura come *valore limite* del rapporto delle differenze finite delle due variabili.**

Poiché il valore a **è costante, esso non è suscettibile di variazione alcuna, e quindi non lo è neppure il secondo membro della equazione che ad esso si riduce. In tali circostanze, il *processo differenziale* si svolge al primo membro**

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} ovvero \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

e questa è una peculiarità di funzioni semplici come ax.

Se nel denominatore del rapporto x_1 decresce, allora esso si avvicina ad x; il limite della sua decrescita è raggiunto, non appena diventa x. Con ciò la differenza x_1 — x viene posta = x — x = 0 e di conseguenza anche y_1 — y = y — y = 0. Otteniamo così

$$\frac{0}{0} = a$$

Poiché nella espressione 0/0 viene cancellata ogni traccia della sua origine e del suo significato, la sostituiamo con dy/dx, [espressione]

nella quale le differenze finite x_1 —x ovvero Δx, e y_1 — y ovvero Δy, appaiono simbolizzate come *differenze abolite* [aufgehobene] o *scomparse*, ovverosia Δy/Δx trapassa in dy/dx.

Quindi

$$\frac{dy}{dx} = a$$

La consolazione alla quale si aggrappano alcuni matematici nazionalizzanti, che dy e dx siano nel fatto soltanto infinitamente piccoli, che il loro rapporto sia solo approssimativamente 0/0, è una chimera, come si mostrerà in modo ancora più evidente in II).

Una particolarità che resta da menzionare del caso considerato è che Δy/Δx = a e così pure dy/dx = a; perciò il limite del rapporto delle differenze finite è anche nello stesso tempo il limite del rapporto dei differenziali.

Un secondo esempio dello stesso caso è

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ y_1 = x_1 \end{array}\right\} ; \qquad y_1 - y = x_1 - x$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} ovvero \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \qquad \frac{0}{0} ovvero \frac{dy}{dx} = 1.$$

II

Poiché y = f(x), la funzione di x, ma nella sua espressione algebrica esplicita, si trova a secondo membro della equazione, chiamiamo tale espressione la funzione originaria di x; chiamiamo la sua prima modificazione, ottenuta per differenziazione, la funzione "derivata" provvisoria di x, e la espressione ottenuto al termine del processo differenziale, la funzione "derivata" di x.

1) $y = ax^3 + bx^2 + cx — e$

Se x cresce fino [al valore] x_1, allora

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e,$$

$$y_1 - y = a\,(x_1^3 - x^3) + b\,(x_1^2 - x^2) + c\,(x_1 - x) =$$
$$= a\,(x_1 - x)(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b\,(x_1 - x)\,(x_1 + x) + c\,(x_1 - x)$$

Perciò

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} ovvero \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^2 + x_1 x + x^2 + b(x_1 + x) + c$$

La ***"derivata" provvisoria***

$$a\,(x_1^2 + x_1x + x^2) + b\,(x_1 + x) + c$$

è qui il *valore limite* del *rapporto* delle differenze finite; ciò significa che per quanto piccole possano essere prese tali differenze, il valore di $\Delta y/\Delta x$ è dato in quella "derivata". Ma non coincide, come invece accadeva in I), col valore limite del rapporto dei differenziali.

Se nella funzione

$$a\,(x_1^2 + x_1x + x^2) + b\,(x_1 + x) + c$$

la variabile x_1 decresce, fino a raggiungere il limite della sua diminuzione, cioè fino a quando diviene *uguale a x*, x_1^2 si trasforma in x^2, x_1x in x^2, e $x_1 + x$ in $2x$ e noi otteniamo la *funzione "derivata"* (come funzione) di x:

$$3ax^2 + 2bx + c$$

Qui si mostra in modo che colpisce [per la sua evidenza]:

Primo: par ottenere là "derivata", occorre porre $x_1 = x$, quindi in *senso strettamente matematico* $x_1 - x = 0$, senza chiacchiere menzognere quali che siano di approssimazione soltanto infinita [allo zero].

Secondo: per il fatto che venga posto $x_1 = x$, quindi $x_1 - x = 0$, nella "derivata" non interviene assolutamente nulla di simbolico. La grandezza x_1, introdotta all'inizio per variazione di x, non scompare; essa viene semplicemente *ridotta* al suo valore limite minimo, che è x, e rimanee un elemento nuovo introdotta nella funzione originaria di x, il quale, attraverso le sue combinazioni in parte con se stesso, in parte con la [variabile] x della funzione originaria, porge la "derivata" definitiva, cioè la *"derivata" provvisoria ridotta alla sua grandezza minima.*

La riduzione di x_1 a x nella prima (provvisoria) funzione "derivata" trasforma al primo membro $\Delta y/\Delta x$ in 0/0 ovvero dy/dx, quindi:

$$\frac{0}{0}\,ovvero\,\frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$$

di modo che la *derivata* appare come *valore limite* del rapporto dei differenziali.

La sciagura trascendentale ovvero simbolica si verifica solo a primo membro, ma ha già perduto il suo orrore poiché appare soltanto come espressione di un processo, che ha già convalidato al secondo membro della equazione il suo contenuto effettivo.

Nella "derivata"

$$3ax^2 + 2bx + c$$

la variabile x esiste sottoposta a condizioni del tutto 'differenti da quelle della funzione originaria di x (precisamente sotto condizioni diverse da $ax^3 + bx^2 + cx — e$). Essa [tale derivata] può quindi dal suo canto presentarsi di nuovo essa stessa come una funzione originaria, e diventare madre di una altra "derivata" attraverso un rinnovato processo differenziale. Ciò si può ripetere quante volte si vuole, fino a che la variabile x non sia definitivamente eliminata dalla "derivata", può quindi continuare all'infinito nel caso di funzioni della x, che sono rappresentabili solo mediante serie infinite, il che è il caso più frequente.

I simboli d^2y/dx^2, d^3y/dx^3, ecc. danno perciò soltanto la collocazione nell'albero genealogico delle "derivate" in riferimento alla funzione originaria assegnata per prima. Essi diventano misteriosi soltanto quando li si tratta come *punto di partenza* del movimento, invece di trattarli come pure e semplici *espressioni di funzioni di x derivate successivamente.* Poiché appare senza dubbio stupefacente il fatto che un rapporto di [grandezze che si sono] annullate debba di bel nuovo passare per gradi potenziati di annullamento, mentre non c'è nulla di stupefacente, di miracoloso nel fatto che, p. es. $3x^2$ debba percorrere il processo differenziale, così come la funzione sua capostipite x^3. Si sarebbe ben potuto anche partire da $3x^2$ come funzione originaria.

Ma *notabene* [in italiano nel testo]. $\Delta y/\Delta x$ è punto di approdo del *processo differenziale* effettivamente solo nelle equazioni del tipo esaminato in I), nelle quali x interviene solo alla prima potenza. Allora si ha addirittura, come si è fatto vedere in I), il risultato:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}$$

In questo caso, dunque, non viene trovato in effetti *nessun nuovo valore limite* attraverso il processo differenziale, che $\Delta y/\Delta x$ percorre; ciò è possibile soltanto fino a che la "derivata" provvisoria include la variabile x, fino a che quindi dy/dx rimane simbolo di un processo reale.

Ciò non impedisce naturalmente in alcun modo, che nel calcolo differenziale i simboli d^2y/dx^2, d^3y/dx^3, ecc., e le loro combinazioni costituiscano anche il secondo membro della equazione. In tal caso si sa però anche, che equazioni puramente simboliche siffatte indicano solo le *operazioni*, che successivamente sono da applicare a effettive funzioni di variabili.

2) $y = ax^m$

Se x diventa x_1, allora $y_1 = ax_1^m$, e

$y_1 - y = a (x_1^m - x^m) =$
$= a(x_1—x) (x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 +$ ecc. fino al termine $x_1^{m-m}x^{m-1}$).

Quindi

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} ovvero \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + ... + x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Se ora applichiamo il processo differenziale a questa *"derivata provvisoria"*, in modo che diventi

$$x_1 = x \qquad \text{ovvero} \qquad x_1 - x = 0$$

allora

x_1^{m-1} si trasforma in x^{m-1}, $x_1^{m-2}x$ in $x^{m-2}x = x^{m-2+1} = x^{m-1}$

e infine

$x_1^{m-m}x^{m-1}$ in $x^{m-m}x^{m-1} = x^{0+m-1} = x^{m-1}$

Otteniamo così *m*-volte la funzione x^{m-1}, e la "derivata" è perciò *max^{m-1}*.

Ponendo $x_1 = x$ nella "derivata provvisoria" [a secondo membro], nel primo membro $\Delta y/\Delta x$ si trasforma in 0/0 ovvero dy/dx, perciò

$$\frac{dy}{dx} = \max^{m-1}$$

Tutte le operazioni del calcolo differenziale potrebbero venire trattate in questo modo, il che sarebbe però una dannata inutile prolissità. Tuttavia segue qui ancora un esempio; in quelli finora dati la differenza $x_1 - x$ interveniva [come fattore] solo una volta nella funzione di x, e perciò scompariva a secondo membro per la formazione di

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} ovvero \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Questo non è il caso dell'esempio che segue:

3) $y = a^x$

se x diviene x_1, allora

$y = a^x$

Perciò

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x(a^{x_1 - x} - 1).$$

[Ma]

$$a^{x_1 - x} = [1 + (a - 1)]^{x_1 - x};$$

$$\left[1 + (a-1)\right]^{x_1 - x} = 1 + (x_1 - x)(a-1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + ecc.$$

Perciò

$$y_1 - y = a^x(a^{x_1 - x} - 1) = a^x\left[(x_1 - x)(a-1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)(x_1 - x}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right.$$

[leggi: di conseguenza]

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \, ovvero \, \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x\left[(a-1) + \frac{x_1 - x - 1}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \frac{(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-1)^3 + ecc.\right]$$

Se ora diviene $x_1 = x$, quindi $x_1 — x = 0$, allora otteniamo per la "derivata":

$$a^x\left[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - ecc.\right]$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = a^x\left[(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - ecc.\right]$$

Se chiamiamo A la somma delle costanti tra parentesi, allora:

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x$$

questo A è però = logaritmo neperiano della base a, **quindi: dy/dx ovvero, se poniamo per y il suo valore:**

$$\frac{da^x}{dx} = \log a \cdot a^x$$

$$da^x = \log a \cdot a^x dx.$$

[Si omette un breve Supplemento, riassunto nel commento che precede].

[Traduzione dall'originale tedesco di Lucio Lombardo Radice].